Mémoire de Master 2
Année 2008/2009
Groupes quantiques et catégorifications

Alexandre Bouayad
sous la direction de David Hernandez

Résumé

Le but de ce mémoire et l'objet de l'article [17] est de catégorifier la forme intégrale ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ du groupe quantique $U^- = U_q^-(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Kac-Moody simplement lacée et U^- la déformation quantique de l'algèbre enveloppante de la partie "triangulaire inférieure" de $\mathfrak{g}$. Pour cela, à chaque graphe Γ sans boucle ni arrête multiple, on associe une famille d'algèbres graduées, définies géométriquement à l'aide de tresses et qui dans certains cas reproduisent des algèbres de nilHecke. On considère les catégories de modules gradués projectifs sur ces algèbres, et plus précisément leurs groupes de Grothendieck. La somme directe de ces groupes, i.e. le groupe de Grothendieck de la somme directe des catégories précédentes, peut alors être muni d'une structure de $\mathcal{A}$-bialgèbre graduée tordue, qui n'est autre que celle de la forme intégrale ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$. Cette catégorification permet finalement d'en définir une autre, cette fois-ci en termes de foncteurs.

Table des matières

1 Introduction

Ce mémoire porte sur l'article [17] de Khovanov et Lauda. Le but est d'en détailler sa présentation, d'introduire les notions nécessaires et connexes à son propos et donner (parfois corriger) des démonstrations de résultats simplement énoncés ou partiellement prouvés.
Dans les parties 3, 4 et 8, les résultats seront la plupart du temps démontrés, on indiquera des références pour les autres. Leurs exposés ne reprend pas celui d'un ouvrage existant, excepté pour quelques passages classiques que l'on indiquera. Il est organisé dans le but de fournir les outils nécéssaires à la compréhension de l'article, avec le souci d'être suffisamment complet afin de bien saisir la nature ces dits outils. Les parties 5, 6 et 7 seront, quant à elles, une simple exposition des théories et résultats qui dessinent l'arrière-plan mathématique sur lequel s'inscrit l'article. Leur compréhension n'étant de prime abord pas nécessaire pour appréhender ce dernier, on se contentera d'en donner une présentation sans démonstration la plupart du temps. Enfin les parties 9, 10 et 11 représentent l'article lui-même. On y suivra son déroulement, tout en le détaillant, et on essaiera de l'inscrire naturellement dans le prolongement des parties précédentes.

La partie 2 regroupent quelques résultats divers et utiles en algèbre. On y parle de présentations par générateurs et relations d'un groupe, des polynômes symétriques et de familles libres et génératrices dans le cadre de modules sur un anneau.

La partie 3 traite des modules et des représentations dans un cadre légèrement plus général que d'ordinaire. On y introduira ainsi la notion de module et de représentation gradués. On commencera par introduire les objets et les définitions spécifiques à la notion de graduation. Les sections suivantes seront plus classiques, dans le sens où l'on développera plusieurs aspects de la théorie ordinaire des modules, en prenant soin de les adapter à notre objet, celui des modules gradués. Les modifications à apporter seront souvent minimes, voire inexistantes, et d'un point de vue formel la graduation n'apportera que peu de différences. Parfois néanmoins, il ne s'agira plus d'une simple généralisation et l'on verra apparaître ses spécificités et ses utilités. Celles-ci consistent principalement à décomposer une structure en parties plus "petites". Dans le cas d'une algèbre sur un corps par exemple, il peut être intéressant de partitionner cette dernière en morçeaux de dimension finie

et de même pour un module.
Dans l'ordre, l'on évoquera les notions de module projectif, de réductibilité, de suites de compositions, on parlera également des théorèmes de Krull-Schmidt, d'extension des scalaires et d'enveloppes projectives.

La partie 4 traite des catégories. Après l'introduction des premières notions, on s'intéresse aux catégories additives et abéliennes, puis aux groupes de Grothendieck de celles-ci. On fait alors le lien avec la partie précédente pour parler des catégories (additives ou abéliennes) de modules (gradués). Notons au passage que la notion de catégorie abélienne est une axiomatisation des catégories de modules (sans graduation), ce que le théorème de Freyd-Mitchell justifie a posteriori. On traite pour finir des opérations d'induction et de restriction, que l'on exprime dans le langage catégoriel.

La partie 5 est un exposition de la théorie des algèbres de Lie. Après la présentation de la structure algébrique de ces dernières, on s'intéresse au développement classique de la théorie des algèbre de Lie semisimples de dimension finies, qui débute sur les sous-algèbres torales (ou les sous-algèbres de Cartan), poursuit avec la décomposition en sous-espaces de poids, puis avec les systèmes de racines, les matrices de Cartan et les diagrammes de Dynkin. On rappelle le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et les présentations par générateurs et relations des algèbres de Lie. On généralise enfin l'encodage que représentent les matrices de Cartan (ou les diagrammes de Dynkin) pour définir les algèbres de de Kac-Moody.

La partie 6 commence par introduire les algèbres de Hopf. On présente ensuite la quantification de l'enveloppe projective des algèbres de Lie, en commançant par le cas $\mathfrak{sl}_2$. Ces groupes quantiques sont munis d'une structure d'algèbre de Hopf.

La partie 7 présente l'algèbre $\mathbf{f}$ et sa forme intégrale ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$, où $\mathcal{A}$ désigne l'anneau $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. On parle avant cela de bialgèbres graduées tordues, structure dont seront munies les algèbres $\mathbf{f}$ et ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$. On conclut en remarquant, que pour les structures d'algèbres associatives, on retrouve avec $\mathbf{f}$ la partie "triangulaire inférieure" des quantifications $U_q(\mathfrak{g})$ pour une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$.

La partie 8 est consacrée au groupe symétrique (où l'on parle surtout de la notion de longueur d'une permutation), des sous-groupes de Young et d'un certain type d'algèbre de nilHecke.

La partie 9 correspond au début de l'article, en particuler à la définition et aux propriétés des algèbres $R(\nu)$, où ν est un combinaison linéaire de sommets d'un graphe Γ simplement lacé et sans boucle, muni d'une forme bilinéaire (qui représente la matrice de Cartan dans le cas où Γ est le graphe de Dynkin d'une algèbre de Kac-Moody simplement lacée). On donne une construction de ces algèbres légèrement différente de celle de l'article, à savoir par générateurs et relations. Cela aura l'avantage de faciliter les démonstrations qui suivront. On accorde par ailleurs une intention importante aux exemples, qui s'avèrent être fondamentaux. Notons que la partie 8 fournit en grande partie les outils de compréhension de cette neuvième partie.

La partie 10 traite des catégories de modules gradués sur $R(\nu)$ pour un ν fixé. On montre que les groupes de Grothendieck $G_0(R(\nu))$ et $K_0(R(\nu))$ des catégories respectives $R(\nu)-$fmod et $R(\nu)-$pmod (modules de dimension finie et modules projectifs) admettent une $\mathcal{A}$-base finie de même cardinal. On étudie les foncteurs d'induction et de restriction pour l'injection $R(\nu) \otimes R(\nu') \to R(\nu + \nu')$ et on observe que ces opérations se comportent bien vis-à-vis des modules projectifs. Le théorème de Mackey dans le cas des algèbres $R(\nu)$ est énoncé, et porte en substance le bien-fondé de la structure de bialgèbre graduée tordue que les foncteurs de restriction et d'induction vont fournir à $K_0(R) = \bigoplus K_0(R(\nu))$.

La partie 11 porte sur la catégorification en elle-même. On commence par regrouper en somme directe $R-$pmod les catégories $R(\nu)-$pmod, et on vérifie que le groupe de Grothendiek correspondant $K_0(R)$ est (presque) muni d'une structure de bialgèbre graduée tordue. On montre alors que pour ces structures, ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ s'injecte dans $K_0(R)$, tout en préservant d'autres opérations. La preuve de la surjectivité utilise des méthodes que Kleshchev a employées dans [16] pour les algèbre de nilHecke dégénérées affines. On conclut finalement avec des applications, tant au niveau des $R(\nu)$-modules, de la bialgèbre ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$, que de la catégorification elle-même puique l'on en propose une autre, exprimée en termes de foncteurs.

Les deux dernières sections 3.3 et 3.4 de l'article ont été omises dans le mémoire.
Il s'avère que les auteurs de l'articles aient fait des erreurs (dans ce qui

correspond ici aux parties 10 et 11). Plusieurs ne sont pas importantes mais d'autres sont plus gênantes. Toutefois, on arrive finalement à les contourner et les résultats finaux ne sont pas remis en cause. A une exception peut-être : l'existence d'une comultiplication sur $K_0(R)$ totalement intrinsèque à $R-$pmod n'est peut-être en fait pas possible. Toutes ces complications sont commentées au long du mémoire dans des remarques, où l'on donne à chaque fois des contre-exemples pour les résultats érronés.
Il sera à chaque fois indiqué, le cas échant, la provenance (même partielle) des démonstrations proposées.

2 Généralités

2.1 Présentation par générateurs et relations

On suppose connu les notions de groupe libre et de présentation par générateurs et relations. Le but de cette section est, étant donné une présentation d'un groupe par générateurs et relations, de relier ses relations, avec les transformations possibles sur les mots (dont les lettres sont les générateurs du groupe).

De façon plus précise, soit X un ensemble de lettres (non nécessairement fini) et R un ensemble (non nécessairement fini) de relations $\{r_\lambda = r_\lambda'\}_{\lambda\in\Lambda}$, où pour tout λ, r_λ et r'_λ sont des mots sur $X \cup X^{-1}$. Soit G le groupe de présentation $< X \mid R >$. On considère le graphe $\mathcal{G}$, dont les sommets sont les mots sur $X \cup X^{-1}$, et tel que deux sommets x et y sont reliés si et seulement si il existe une suite finie de mots $x_0, \dots, x_p$ (où $p \in \mathbb{N}$), avec $x_0 = x$ et $x_p = y$, tels que pour $i \in \{0, \dots, p-1\}$, x_{i+1} s'obtient à partir de x_i, soit en supprimant dans ce dernier aa^{-1} ou $a^{-1}a$ (pour $a \in X$), soit en y insérant aa^{-1} ou $a^{-1}a$, soit en y remplaçant (pour un $\lambda \in \Lambda$) r_λ par r'_λ ou r'_λ par r_λ.

Théorème 2.1.1. Deux mots x et y sur $X \cup X^{-1}$ ont la même image dans le groupe G si et seulement s'ils sont reliés dans le graphe associé $\mathcal{G}$.

Démonstration. On voit facilement par récurrence sur p que si x et y sont reliés dans $\mathcal{G}$, alors ils sont égaux dans G. Montrons la réciproque.
Le groupe G est le groupe libre F engendré par X, quotienté par le sous-groupe normal N engendré par la famille $\{r_\lambda {r'_\lambda}^{-1}\}_{\lambda\in\Lambda}$. Considérons l'ensemble Z des mots z, tels que z soit relié dans $\mathcal{G}$ au mot vide. Son image dans le groupe libre F est un sous-groupe normal, contenant la famille $\{r_\lambda {r'_\lambda}^{-1}\}_{\lambda\in\Lambda}$ et donc N tout entier. La seule difficulté est de vérifier la stabilité par passage à l'inverse. Pour le voir, il faut remarquer que si un mot x_2 est obtenu à partir d'un autre mot x_1 en remplaçant dans ce dernier (pour un $\lambda \in \Lambda$) (r_λ^{-1} par ${r'_\lambda}^{-1}$ ou ${r'_\lambda}^{-1}$ par r_λ^{-1}, alors x_1 et x_2 sont reliés dans $\mathcal{G}$. En effet, par exemple, en ajoutant ${r'}_\lambda {r'}_\lambda^{-1}$ dans x_1 à droite de r_λ^{-1}, en remplaçant ${r'}_\lambda$ par r_λ, puis en supprimant $r_\lambda^{-1} r_\lambda$, on obtient x_2. Si x et y ont la même image dans le groupe G, il existe, d'après ce qui précède, $z \in Z$, tel que l'égalité $x = yz$ ait lieu dans G. z étant relié au mot vide dans $\mathcal{G}$, x l'est à y, ce qui conclut la démonstration. $\square$

2.2 Quelques lemmes

Lemme 2.2.1. Soit $\mathbf{A}$ un anneau (non nécessairement commutatif ou unitaire), et $\mathbf{B}$ un sous-anneau de $\mathbf{A}$, tel que $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ soit une base de $\mathbf{A}$ vu comme $\mathbf{B}$-module à gauche. Alors $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une base de $\mathbf{A}[x_\lambda\ ,\ \lambda\in\Lambda]$ vu comme $\mathbf{B}[x_\lambda\ ,\ \lambda\in\Lambda]$-module à gauche.

Démonstration. Le fait que la famille soit génératrice est évident. Pour la liberté, si $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma \cdot a_\gamma = 0$, où $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une famille presque nulle de $\mathbf{B}[x_\lambda\ ,\ \lambda\in\Lambda]$, les coefficients devant chaque monôme de la somme sont nuls. $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ étant libre sur $\mathbf{B}$, les coefficients de chaque monôme des f_γ sont nuls, ce qui conclut la démonstration. □

Lemme 2.2.2. Soit $\mathbf{A}$ un anneau (non nécessairement commutatif ou unitaire), et $\mathbf{B}$ un sous-anneau commutatif de $\mathbf{A}$. Soit alors b_{ij} (avec $1\le i,j\le p$) des éléments de $\mathbf{B}$, tels que

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors les éléments

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{p2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{p} \end{pmatrix}$$

constituent une famille libre du $\mathbf{A}$-module à gauche $\mathbf{A}^p$.

Démonstration. Les b_{ij} définissent naturellement une application linéaire du groupe additif $(\mathbf{A})^p$. Le fait que le déterminant soit non nul implique l'existence d'un inverse à gauche de cette application (grâce à la comatrice), ce qui prouve son injectivité, et par suite, la liberté de la famille. □

Remarque 2.2.1. On peut noter par ailleurs que dans le cas particulier où $\mathbf{B}$ est inclus dans le centre de $\mathbf{A}$, l'application définie dans le lemme précédent est en fait linéaire sur le $\mathbf{A}$-module à gauche $\mathbf{A}^p$.

2.3 Les polynômes symétriques

Soit $\mathbf{A}$ un anneau unitaire (pas forcément commutatif). On note

$$\mathbf{A}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$$

l'anneau des polynômes à m indéterminées, et $\mathbf{A}[x_1, x_2, \ldots, x_m]^{S_m}$ le sous-anneau des polynômes symétriques (invariants sous l'action naturelle de S_m). Les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sont définis de la manière suivante :

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x^{i_1} \ldots x^{i_k}.$$

On rappelle le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.3.1. Supposons $\mathbf{A}$ commutatif et intègre. Pour tout polynôme symétrique $f \in \mathbf{A}[x_1, x_2, \ldots, x_m]^{S_m}$, il existe un unique $g \in \mathbf{A}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ tel que

$$f = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m).$$

Démonstration. Voir [3, chapitre 8, théorème 8.14]. $\square$

Théorème 2.3.2. $\mathbf{A}[x_1, \ldots, x_m]$ est un module libre de rang $m!$ sur l'anneau $\mathbf{A}[x_1, \ldots, x_m]^{S_m}$.

Démonstration. la preuve s'inspire en partie de [13, p. 207].
Montrons que $({x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_{m-1}}^{\alpha_{m-1}},\ 0 \leq \alpha_i \leq m - i - 1)$ est une base. On procède par récurrence sur m.
On note $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{m-1}$ les polynômes symétriques élémentaires en $x_2, \ldots, x_m$.
On a la suite d'inclusion d'anneau suivante :

$$\mathbf{A}[x_1, \ldots, x_m]^{S_m} \subseteq \mathbf{A}[x_2, \ldots, x_m]^{S_{m-1}}[x_1] \subseteq \mathbf{A}[x_2, \ldots, x_m][x_1] = \mathbf{A}[x_1, \ldots, x_m].$$

La première inclusion provient du fait qu'un polynôme symétrique de $\mathbf{A}[x_1, \ldots, x_m]$, vu dans $\mathbf{A}[x_2, \ldots, x_m][x_1]$, a pour coefficient des polynômes symétriques de $\mathbf{A}[x_2, \ldots, x_m]$. Par hypothèse de récurrence et d'après le lemme 2.2.1, on sait que $({x_2}^{\alpha_1} \ldots {x_{m-1}}^{\alpha_{m-1}},\ 0 \leq \alpha_i \leq m - i - 1)$ est une base de $\mathbf{A}[x_2, \ldots, x_m]^{S_{m-1}}[x_1]$. Il reste donc à voir que $(1, x_1, \ldots, {x_1}^{m-1})$ est une base de $\mathbf{A}[x_2, \ldots, x_m]^{S_{m-1}}[x_1]$ sur $\mathbf{A}[x_1, \ldots, x_m]^{S_m}$. Les relations

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + x_1, \quad \sigma_2 = \sigma'_2 + x_1\sigma'_1, \quad \ldots, \quad \sigma_{m-1} = \sigma'_{m-1} + x_1\sigma'_{m-2},$$

permettent de voir, d'après le théorème fondamental, que $(x^\alpha,\ \alpha \geq 0)$ est une famille génératrice, et aussi que

$$x^m = \sum_{1 \leq i \leq m} (-1)^{i+1} \sigma_i \, {x_1}^{m-i},$$

ce qui permet de conclure que $(1, x_1, \ldots, {x_1}^{m-1})$ est génératrice. Reste à voir que cette famille est libre.
Supposons que l'on ait

$$f_0 + f_1 \, x_1 + \ldots f_{m-1} \, {x_1}^{m-1} = 0,$$

où les f_j sont des polynômes symétriques à m variables. Alors, par l'action du groupe symétrique, on a également

$$f_0 + f_1 \, x_i + \ldots f_{m-1} \, {x_i}^{m-1} = 0,$$

pour tout $1 \leq i \leq m$. On en déduit que les f_j sont nuls car le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & {x_m}^{m-1} \end{vmatrix}$$

est non nul. D'après le lemme 2.2.2, on en déduit que les f_j sont nuls.

□

3 Modules et représentations

Le but de cette partie est de présenter la théorie élémentaire des modules (et des représentations) dans un cadre légèrement plus général que d'ordinaire, celui des modules gradués. Il s'agit bel et bien d'une généralisation puisque tout module possède une graduation triviale sur le semi-groupe (0).
La section 3.2 définit la notion de graduation et en donne quelques résultats spécifiques. Les sections suivantes ne sont à peu de choses près qu'une répétition de la théorie classique des modules, que l'on prend soin d'adapter au cas des graduations. Pour ne pas alourdir l'exposé, les définitions de certaines notions, bien qu'encore valables dans le cadre des graduations, seront alors omises ou rapidement évoquées.

3.1 Conventions

Dans toute la suite du mémoire, sauf précision supplémentaire, $\mathbb{k}$ désignera un anneau (associatif) unitaire commutatif, $\mathbf{A}$ un anneau (associatif) unitaire (pas forcément commutatif). Nous entendrons par module M (resp. à gauche et à droite) sur $\mathbf{A}$ un groupe abélien sur lequel $\mathbf{A}$ agit (resp. à gauche et à droite). Si cette action est unitaire, le module sera dit unitaire.
Une répresentation à gauche de $\mathbf{A}$ est la donnée d'un groupe abélien M et d'un morphisme d'anneau de $\mathbf{A}$ vers $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, l'anneau des endomorphismes de groupe de M. Une représentation est unitaire si le morphisme est unitaire. Pour les représentations à droite, le morphisme est un anti-morphisme d'anneau. Les notions de représentation et de module sont équivalentes et dans la suite nous confondrons les deux. De plus la théorie étant valable dans les deux cas gauche et droite, nous supposerons par défaut que l'action se fait à gauche. On rappelle qu'un module ou une représentation est fidèle si le morphisme $\mathbf{A} \to End_{\mathbb{Z}}(M)$ est injectif.
L'anneau $\mathbf{A}$ est une $\mathbb{k}$-algèbre s'il est aussi un $\mathbb{k}$-module unitaire et si les deux structures de module et d'anneau sont compatibles. Il est équivalent de se donner un morphisme d'anneau unitaire de $\mathbb{k}$ dans le centre de $\mathbf{A}$. Nous verrons plus tard une troisième manière de présenter la notion d'algèbre qui permettra de mieux comprendre celle de coalgèbre et d'algèbre de Hopf.
Un module ou une représentation sur une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ est un module ou une représentation sur l'anneau $\mathbf{A}$, ou de façon équivalente un $\mathbb{k}$-module sur lequel $\mathbf{A}$ agit de façon compatible (en terme de représentation par exemple, on a un morphisme de $\mathbb{k}$-algèbre (unitaire ou pas) de $\mathbf{A}$ vers $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(M)$, l'anneau

des endomorphismes de $\mathbb{k}$-module de M).
Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre, on peut donc se placer dans le cadre non restrictif des $\mathbb{k}$-algèbres et de leurs modules et représentations. Sans précision supplémentaire, les modules et les représentations seront supposés unitaires, toutefois plusieurs des définitions et résultats qui suivent sont encore valables dans le cas non unitaire.

3.2 Graduations

Définition 3.2.1. Un semi-groupe $(G, *)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ associative, possédant un élément neutre (à droite et à gauche) et régulière ($x * y = x * z$ implique $y = z$ et $y * x = z * x$ implique $y = z$).

Définition 3.2.2. Soit $(G, +)$ un semi-groupe abélien. Une (G-)graduation d'un $\mathbb{k}$-module M est une décomposition en somme directe $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$. On dit alors que M est (G-)gradué. On appelle le sous-module M_g un espace homogène de degré (ou de poids) g, et ses éléments, des éléments homogènes de degré (ou de poids) g.

Définition 3.2.3. Une (G-)graduation d'une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ est la donnée d'une G-graduation du $\mathbb{k}$-module $\mathbf{A}$ compatible avec la structure d'anneau : si a et b sont respectivement des éléments homogènes de degré g_1 et g_2, alors ab est homogène de degré $g_1 + g_2$. On dit alors que $\mathbf{A}$ est (G-)gradué.

On peut remarquer que dans le cas d'une $\mathbb{k}$-algèbre graduée, l'élément neutre, ou plus généralement tout élément idempotent, est obligatoirement de degré nul. On sera parfois amené à considérer le cas $\mathbf{A} = \mathbb{k}$, la graduation sous-entendue est la graduation triviale : $\mathbb{k}_0 = \mathbb{k}$.

Définition 3.2.4. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbb{k}$-algèbre G-graduée. Une (G-)graduation d'un $\mathbf{A}$-module M est une G-graduation du $\mathbb{k}$-module M compatible avec la G-graduation de $\mathbf{A}$: si a est un élément homogène de degré g_1 de $\mathbf{A}$ et x un élément homogène de degré g_2 de M, alors $a.x$ est homogène de degré $g_1 + g_2$. On dit alors que M est (G-)gradué.

On définit également la notion de $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-bimodule gradué, où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des $\mathbb{k}$-algèbres graduées.
Le fait de travailler avec un semi-groupe peut poser problème dans le sens où l'on n'aimerait parfois utiliser l'opération différence. On peut contourner

cet ennui en remarquant, du fait de la régalurité, que G s'injecte dans son symétrisé H (un groupe abélien donc), i.e. son localisé par rapport à l'ensemble de ses éléments non nuls. On étend la G-graduation de n'importe quelle structure G-graduée en une H-graduation, en posant nuls les espaces homogènes de poids $h \in H$ n'appartenant pas à G.

Définition 3.2.5. Soit M un $\mathbb{k}$-module gradué (resp. un $\mathbf{A}$-module gradué). N est un sous-$\mathbb{k}$-module homogène (resp. un sous-$\mathbf{A}$-module homogène) de M si c'est un sous-$\mathbb{k}$-module (resp. un sous-$\mathbf{A}$-module) tel que

$$N = \bigoplus_{g \in G} (N \cap M_g).$$

On note que N est un sous-$\mathbb{k}$-module homogène (resp. un sous-$\mathbf{A}$-module homogène) de M si et seulement s'il est engendré en tant que sous-$\mathbb{k}$-module (resp. en tant que sous-$\mathbf{A}$-module) par des éléments homogènes. Dans ce cas l'inclusion de N dans M est un morphisme de $\mathbb{k}$-module gradué (resp. de $\mathbf{A}$-module gradué).
On définit de même les sous-idéaux homogènes à gauche, à droite et bilatères, ainsi que les sous-algèbres homogènes d'une $\mathbb{k}$-algèbre graduée. On peut alors définir la notion de quotient gradué. Il existe, par exemple dans le cas d'un sous-$\mathbf{A}$-module homogène, une graduation canonique sur le quotient, telle que la projection soit un morphisme de $\mathbf{A}$-module gradué.
Enfin on note qu'il est possible de définir les notions de produit et somme directs.

Définition 3.2.6. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbb{k}$-algèbre graduée. Un $\mathbf{A}$-module M gradué est dit fini si, considéré sans sa graduation, il est de type fini sur $\mathbb{k}$; de type fini si, considéré sans sa graduation, il est de type fini sur $\mathbf{A}$.

On peut noter que dans les deux cas, cela signifie que M (considéré sans sa graduation) est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes, respectivement sur $\mathbb{k}$ et sur $\mathbf{A}$.

Définition 3.2.7. Les morphismes de $\mathbb{k}$-module gradué, de $\mathbb{k}$-algèbre graduée et de $\mathbf{A}$-module gradué sont, respectivement, des morphismes de $\mathbb{k}$-module, de $\mathbb{k}$-algèbre et de $\mathbf{A}$-module, qui préservent la graduation : un élément homogène est envoyé sur un élément homogène de même degré, ou de façon équivalente, un espace homogène est envoyé dans l'espace homogène de même degré.

Soit $\mathbf{A}$ une $\Bbbk$-algèbre graduée et M, N des $\mathbf{A}$-modules gradués. A partir de maintenant et dans toute la suite du mémoire, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$ et $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$ désigneront les morphismes (resp. les endomorphismes) de $\mathbf{A}$-module gradué (préservant la graduation donc) de M dans N (resp. de M). $\mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M, N)$ et $\mathrm{END}_{\mathbf{A}}(M)$ désigneront, quant à eux, les morphismes (resp. les endomorphismes) de $\mathbf{A}$-module (ne préservant pas nécessairement la graduation donc) de M dans N (resp. de M), ce qui revient en quelque sorte à oublier les graduations de ces derniers. Lorsque l'on considère les structures classiques sans graduation, les deux notations sont adaptées puisque ces strutures ont une (0)-graduation triviale. Cela justifie leur emploi et lève l'éventuelle contradiction avec les notations utilisées au début de partie.

Définition 3.2.8. Soit M un $\mathbf{A}$-module gradué et $g \in G$. On définit le décalage de graduation $M\{g\}$ comme étant le $\mathbf{A}$-module M, muni de la graduation $\big(M\{g\}\big)_{g+g'} = M_{g'}$, ou encore $\big(M\{g\}\big)_{g'} = M_{g'-g}$.
On définit de même un décalage pour les $\Bbbk$-modules gradués et les $\Bbbk$-algèbres graduées.

Définition 3.2.9. Soient M et N des $\Bbbk$-modules gradués. $f : M \to N$ est appelé un morphisme homogène (de $\Bbbk$-module gradué) s'il existe $g \in G$ tel que f soit un morphisme de $\Bbbk$-module gradué de $M\{g\}$ dans N, i.e. f envoie $M_{g'}$ dans $N_{g+g'}$ pour tout $g' \in G$. On définit de même la notion de morphisme homogène de $\mathbf{A}$-module gradué.

Lemme 3.2.1. Soient $\mathbf{A}$ une $\Bbbk$-algèbre graduée et M, N des $\mathbf{A}$-modules gradués. Le sous-$\Bbbk$-module de $\mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M, N)$ engendré par les morphismes homogènes admet la décomposition en somme directe

$$\bigoplus_{g \in G} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M\{g\}, N),$$

qui fait de lui un $\Bbbk$-module gradué, une $\Bbbk$-algèbre graduée dans le cas où $M = N$, que l'on notera respectivement $\mathrm{HOM}^h_{\mathbf{A}}(M, N)$ et $\mathrm{END}^h_{\mathbf{A}}(M)$

Démonstration. Immédiat. □

On peut noter qu'un $\mathbf{A}$-module gradué M est la donnée d'une action homogène dans le sens où les éléments de l'algèbre agissent comme des morphismes homogènes de $\Bbbk$-module gradué. En terme de représentation, c'est la donnée d'un morphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée de $\mathbf{A}$ dans $\mathrm{END}^h_{\Bbbk}(M)$.

Définition 3.2.10. On appelle $\mathbf{A}$-module gradué libre, un $\mathbf{A}$-module gradué, tel qu'il existe une base du module considéré sans sa graduation, la base étant constitué d'éléments homogènes.

On remarque qu'il est équivalent de dire qu'il existe un isomorphisme de $\mathbf{A}$-modules gradués avec un module de la forme $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{A}\{g_\lambda\}$.

Lemme 3.2.2. Soient $\mathbf{A}$ une $\Bbbk$-algèbre graduée et M, N des $\mathbf{A}$-modules gradués. On suppose de plus que M est de type fini et que G est un groupe (abélien). On a alors l'égalité

$$\mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M,N) = \mathrm{HOM}^h_{\mathbf{A}}(M,N),$$

qui fait de $\mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M,N)$ un $\Bbbk$-module gradué.

Démonstration. M étant de type fini, il est engendré en tant que $\mathbf{A}$-module par un nombre fini d'éléments homogènes. Par suite M est le quotient d'un module libre gradué de la forme $L = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{A}\{g_\lambda\}$ (Λ ensemble fini), par un sous-module homogène N. Notons (x_λ) la famille génératrice homogène de M correspondante. Soit $f \in \mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M,N)$, f_g est défini comme l'unique morphisme de $\mathbf{A}$-module qui envoie x_λ sur la composante de degré $g_\lambda + g$ de $f(x_\lambda)$. Il faut montrer que f_g est bien défini. Pour cela, on remarque qu'il l'est sur L, reste donc à voir qu'il envoie N sur 0, ce que l'on vérifie aisément puisque f envoie N sur 0. Les x_λ étant en nombre fini, les f_g non nuls sont en nombre fini. D'après leur définition et le fait que G soit symétrique, f en est leur somme. □

Définition 3.2.11. Soient $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ des $\Bbbk$-algèbres graduées. La $\Bbbk$-algèbre $\mathbf{A} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{A}_i$ définie comme le produit tensoriel sur $\Bbbk$ des algèbres $\mathbf{A}_i$, hérite d'une graduation canonique :

$$\mathbf{A}_g = \bigoplus_{g_1+g_2+\cdots+g_n=g} (\mathbf{A}_1)_{g_1} \otimes_\Bbbk (\mathbf{A}_2)_{g_2} \otimes_\Bbbk \cdots \otimes_\Bbbk (\mathbf{A}_n)_{g_n},$$

qui fait d'elle une $\Bbbk$-algèbre graduée.

On définit de même une graduation canonique pour un produit tensoriel fini de $\Bbbk$-modules gradués. Par ailleurs, soient $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, …, $\mathbf{A}_n$ des $\Bbbk$-algèbres graduées et M_1, M_2, …, M_n des modules gradués sur $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, …, $\mathbf{A}_n$ respectivement. Le $\Bbbk$-module gradué $M_1 \otimes_\Bbbk M_2 \otimes_\Bbbk \cdots \otimes_\Bbbk M_n$ est muni d'une structure de $\big(\mathbf{A}_1 \otimes_\Bbbk \mathbf{A}_2 \otimes_\Bbbk \cdots \otimes_\Bbbk \mathbf{A}_n\big)$-module gradué, compatible avec la structure précédente de $\Bbbk$-module gradué. Enfin si M et N sont des modules gradués sur une $\Bbbk$-algèbre graduée $\mathbf{A}$, respectivement à droite et à gauche, le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ est muni d'une structure de $\Bbbk$-module gradué, comme quotient de $M \otimes_{\Bbbk} N$ par un sous-$\Bbbk$-module homogène.

Lemme 3.2.3. Si on a des isomorphismes

$$M_1 \cong N_1, \quad M_2 \cong N_2, \quad \dots, \quad M_n \cong N_n$$

de modules gradués sur $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, …, $\mathbf{A}_n$ respectivement, alors on a un isomorphisme de $\big(\mathbf{A}_1 \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}_2 \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}_n\big)$-module gradué :

$$M_1 \otimes_{\Bbbk} M_2 \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} M_n \cong N_1 \otimes_{\Bbbk} N_2 \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} N_n.$$

Démonstration. Immédiat. □

Soit M un $\mathbf{A}$-module gradué fini et supposons que G est un groupe. On note $M^* = \mathrm{HOM}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$, le dual de M. Le lemme 3.2.2 fournit une graduation (prendre $\mathbf{A} = \Bbbk$, muni de la graduation triviale), que l'on peut également définir par

$$(M^\star)_g = \big\{\varphi \in M^\star \ / \ \varphi(M_{g'}) = 0 \text{ pour tout } g' \neq -g\big\}.$$

En d'autres mots $(M^\star)_g = (M_{-g})^\star$. La structure de $\mathbf{A}$-module à gauche gradué de M fait alors de M^* un $\mathbf{A}$-module à droite gradué (fini).

Proposition 3.2.1. Soient $\Bbbk$ un corps et M, N des $\mathbf{A}$-modules gradués respectivement à droite et à gauche. On suppose de plus que N et $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ sont finis, que M est de type fini et que G est un groupe. Le $\Bbbk$-espace vectoriel gradué $(M \otimes_{\mathbf{A}} N)^*$ est isomorphe à $\mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M, N^*)$.

Démonstration. A $\varphi \in (M \otimes_{\mathbf{A}} N)^*$, on associe le morphisme de $\mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M, N^*)$: $x \mapsto \varphi(x \otimes \cdot)$. Par ailleurs, à $f \in \mathrm{HOM}_{\mathbf{A}}(M, N^*)$, on associe la forme linéaire $x \otimes y \mapsto [f(x)](y)$. On vérifie que cela définit deux morphismes de $\Bbbk$-module gradué, inverses l'un de l'autre. □

Remarque 3.2.1. Le lemme 4.4.5 montrera que l'on peut supprimer l'hypothèse $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ fini.

On suppose pour la fin de cette section que la graduation se fait sur $\mathbb{Z}$, i.e. $(G, +) = (\mathbb{Z}, +)$.

On note $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ le localisé de $\mathbb{Z}[q]$ par rapport à l'élément q (i.e. le localisé par rapport à la partie multiplicative $\{1, q, q^2, \ldots\}$), ou encore le sous-anneau de $\mathbb{Z}(q)$ engendré par q et q^{-1}. On note $\mathbb{Z}[[q]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z}((q))$ son corps des fractions, appelé l'anneau des séries de Laurent. On note que toute série de Laurent s'écrit de manière unique sous la forme

$$\sum_{a \geq a_0} c_a q^a, \quad \text{où } a_0 \in Z \text{ et } c_a \in Z \text{ pour tout } a \geq a_0.$$

Définissons dès à présent des éléments de $\mathbb{Z}[q]$ utilisés pour les groupes quantiques. Soit $m \geq 1$, on désigne par $[m]$ l'élément $\frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$ et la factorielle quantique $[m]^!$ par $[m][m-1]\cdots[1]$. Remarquons que l'on a bien défini des éléments de $\mathbb{Z}[q]$, à coefficients positifs qui plus est, puisque $[1] = 1$ et $[m] = q^{m-2} + q^{m-4} + \cdots + q^{-m+4} + q^{-m+2}$ pour $m \geq 2$.

Définition 3.2.12. Soit M un $\mathbf{A}$-module gradué et $f \in \mathbb{Z}((q, q^{-1}))$ un polynôme de Laurent, dont les coefficients sont positifs. On note M^f ou $M^{\oplus f}$ la somme directe de copies de M dont les graduations sont décalées de telle sorte que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, le nombre de modules $M\{a\}$ intervenant dans la somme soit le coefficient de q^a.

Définition 3.2.13. Soient $\Bbbk$ un corps et M un $\Bbbk$-module gradué dont la graduation est minorée (les espaces homogènes sont nuls pour $a \in \mathbb{Z}$ suffisamment petit) et les espaces homogènes de dimension finie. On définit alors la dimension graduée de M, que l'on note $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M)$, l'élément de $\mathbb{Z}((q, q^{-1}))$ dont la valeur du coefficient q^a est défini comme la dimension de l'espace homogène M_a.

Remarque 3.2.2. Si on suppose de plus que la graduation est majorée, alors $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

Lemme 3.2.4. Soient $\Bbbk$ un corps, M, N deux $\Bbbk$-modules dont la graduation est minorée et les espaces homogènes de dimension finie et f un polynôme de Laurent, dont les coefficients sont positifs. On a dans $\mathbb{Z}((q, q^{-1}))$ les égalités suivantes

(a) $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M\{a\}) = q^a \, \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M)$;

(b) $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M \oplus N) = \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M) + \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(N)$;

(c) $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M^f) = f \, \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M)$;

(d) $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M \otimes_{\Bbbk} N) = \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(M)\ \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(N)$.

Démonstration. Simples vérifications. □

Lemme 3.2.5. Soient M et N des $\mathbf{A}$-modules respectivement à droite et à gauche gradués. Supposons de plus que M soit de type fini. Si la graduation de N est bornée (majorée et minorée) alors il en de même de $M \otimes_{\mathbf{A}} N$.

Démonstration. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ une famille génératrice d'éléments homogènes de M. Soit $a \geq b$ dans $\mathbb{Z}$ tels que la graduation de N soit nulle pour les degrés inférieurs strictement à a et supérieurs strictement à b, on note $n = b - a + 1$. Tout élément homogène de $\mathbf{A}$ de degré plus grand ou égal à n agit par 0 sur N. Il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que si une combinaison linéaire homogène $\sum_j x_j.a_j$ est de degré plus grand que d, alors les degrés des a_j sont plus grand que n. Puisque les éléments x_j engendrent M, tout élément homogène de degré plus grand que d est une combinaison linéaire homogène $\sum_j x_j.a_j$, avec $\deg(a_j) \geq n$. Il existe également $d' \in \mathbb{Z}$ tel que tout élément homogène de $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ de degré plus grand que d' s'écrivent comme un somme d'élément de la forme $x \otimes y$ avec $x \in M$ de degré plus grand que d et $y \in N$. Or $x \otimes y = \sum_j (x_j.a_j) \otimes y = \sum_j x_j \otimes a_j.y = 0$ car $\deg(a_j) \geq n$. Ainsi la graduation du produit tensoriel est majorée par d'. On procède de la même manière pour la minoration. □

3.3 Quelques lemmes

Définition 3.3.1. Soit M un $\mathbf{A}$-module gradué et $a \in \mathbf{A}$ homogène. On note $a.M$ le sous-$\Bbbk$-module homogène de M, constitué des éléments de la forme $a.x$, avec $x \in M$.

Définition 3.3.2. Soit M un $\mathbf{A}$-module gradué et A un ensemble d'élément de $\mathbf{A}$ homogènes. On note $A.M$ le sous-$\Bbbk$-module homogène de M, engendré par les éléments de la forme $a.x$, avec $a \in A$ et $x \in M$.

Remarque 3.3.1. Soit M un $\mathbf{A}$-module gradué et A un sous-$\Bbbk$-module homogène de N. On note encore $A.M$ le sous-$\Bbbk$-module homogène de M, engendré par les éléments de la forme $a.x$, avec $a \in A$ et $x \in M$. On retrouve la définition précédente en remarquant que $A.M = F.M$ pour toute famille génératrice F de A, constituée d'éléments homogènes. En particulier, $A.M$ est également défini dans le cas où A est un idéal à gauche homogène de $\mathbf{A}$.

Lemme 3.3.1. Soit M un $\mathbf{A}$-module à gauche gradué et $a \in \mathbf{A}$ idempotent. On a l'isomorphisme de $\Bbbk$-module gradué suivant :

$$a.M \cong a\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} M.$$

Démonstration. À $a' \otimes x$, on associe $a'.x \in a.M$, ce qui définit une application $\Bbbk$-linéaire de $aA \otimes_{\mathbf{A}} M$ dans $a.M$ préservant la graduation (a est homogène de degré 0 car il est idempotent).
D'autre part, à $y \in a.M$, on associe $a \otimes y$, définissant également une application $\Bbbk$-linéaire de $a.M$ dans $aA \otimes_{\mathbf{A}} M$. L'idempotence de a assure que les deux applications sont inverses l'une de l'autre. □

Lemme 3.3.2. Soit M un $\mathbf{A}$-module à droite gradué et $a \in \mathbf{A}$ idempotent. On a l'isomorphisme de $\Bbbk$-module gradué suivant :

$$M.a \cong M \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}a.$$

Démonstration. Preuve semblabe à la précédente. □

Lemme 3.3.3. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux $\Bbbk$-algèbres graduées, a un élément idempotent de $\mathbf{A}$. Si M est un $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-bimodule, alors on a l'isomorphisme de $\mathbf{B}$-module à droite gradué

$$a.M \cong a\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} M.$$

Si M est un $(\mathbf{B}, \mathbf{A})$-bimodule, alors on a l'isomorphisme de $\mathbf{B}$-module à gauche gradué

$$M.a \cong M \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}a.$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration des deux lemmes précédent, en remarquant que les isomorphismes construits sont $\mathbf{B}$-linéaires. □

3.4 Modules projectifs

A partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie, nous omettrons le mot "gradué". A moins qu'il ne soit spécifié le contraire, tous les objets seront toutefois à considérer dans le cadre d'une graduation (sous-module, idéal, morphisme ...).

Définition 3.4.1. Un $\mathbf{A}$-module P est dit projectif s'il est un facteur direct d'un $\mathbf{A}$-module libre.

Proposition 3.4.1. Le $\mathbf{A}$-module P est projectif si et seulement si pour tout $\mathbf{A}$-modules M et N, pour tout $\mathbf{A}$-morphisme $f : P \to M$ et $\mathbf{A}$-morphisme surjectif $g : N \to M$, il existe un relèvement (pas forcément unique) $h : P \to N$ (i.e un $\mathbf{A}$-morphisme qui vérifie $g \circ h = f$).

La proposition s'illustre sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
N \arrow[r, "g"'] & M
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Supposons que P soit un facteur direct d'un $\mathbf{A}$-module libre L. Soient M, N, f et g donnés comme dans l'énoncé et $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base homogène de L (Λ est un ensemble fini ou infini). On note p la projection de L sur P et i l'inclusion de P dans L. Pour chaque λ, par surjectivité de g, il existe $y_\lambda \in N$ homogène tel que $g(y_\lambda) = (f \circ p)(x_\lambda)$. On définit $h_1 : L \to N$ comme l'unique morphisme envoyant x_λ sur y_λ (qui sont bien de même degré). $h = h_1 \circ i$ est alors un relèvement de f.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[d, shift left, "p"] \arrow[ddl, dashed, "h_1"'] \\
& P \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
N \arrow[r, "g"'] & M
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, supposons que P possède la propriété de relèvement de l'énoncé. Comme pour tout module, il existe un $\mathbf{A}$-module libre L tel que P en soit un quotient. Notons p la projection. Le but est de construire une section $i : P \to L$, c'est-à-dire un morphisme vérifiant $p \circ i = id$. Or en prenant $f = id$ et $g = p$, h est alors le i recherché.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "id"] \arrow[dl, dashed, "i"'] \\
L \arrow[r, "p"'] & P
\end{tikzcd}$$

$\square$

Lemme 3.4.1. Toute suite exacte courte de **A**-modules

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

avec P projectif se scinde. De façon équivalente, M est la somme directe de N et M.

Démonstration. On utilise la propriété de relèvement du module projectif P, assurée par la précédente proposition. La méthode de démonstration est alors la même que celle de la deuxième partie de la preuve précédente. □

Lemme 3.4.2. Un **A**-module P projectif et de type fini est un facteur direct d'un module libre de type fini.

Démonstration. En utilisant la propriété de relèvement du module projectif P, assurée par la proposition 3.4.1, il suffit d'en reprendre la deuxième partie de la preuve, en remarquant que l'on peut choisir L de type fini. □

3.5 Complète réductibilité

Définition 3.5.1. Un **A**-module M est dit irréductible si $M \neq 0$ et s'il n'admet que 0 et lui-même comme sous-**A**-modules. Il est dit complètement réductible s'il peut s'écrire comme somme directe de sous-**A**-modules irréductibles.

Définition 3.5.2. Une $\Bbbk$-algèbre **A** est dite semi-simple à gauche (resp. à droite) si elle complètement réductible en tant que **A**-module à gauche (resp. à droite).

Lemme 3.5.1 (*Lemme de Schur*)**.** Soient M et N deux **A**-modules irréductibles et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$. On a $f = 0$ ou f bijective.

Démonstration. Le noyau de f est soit vide, soit M tout entier. Le second cas implique $f = 0$. Le premier implique que l'image de f est non nulle, donc égale à N, ce qui signigie que f est bijective. □

Lemme 3.5.2. Supposons que $\Bbbk$ soit un corps algébriquement clos. Soit M un **A**-module irréductible. Alors tout $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$ est une homothétie vectorielle. En d'autres termes, $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M) \cong \Bbbk$, où $\Bbbk$ est muni de la graduation triviale.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$, $\Bbbk$ étant algébriquement clos, f admet une valeur propre $\lambda \in \Bbbk$. En d'autres termes, le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}$ est non vide, donc égal à M tout entier, ce qui conclut la preuve. □

Lemme 3.5.3. Supposons que $\Bbbk$ soit un corps algébriquement clos. Soit M un **A**-module irréductible. Alors tout élément du centre de **A** agit par homothétie vectorielle. De plus un élément central homogène de rang non nul agit par 0.

Démonstration. Soit pour commencer x un élément central homogène. Celui-ci définit un **A**-endomorphisme homogène de M. $\Bbbk$ étant algébriquement clos, x admet une valeur propre $\lambda \in \Bbbk$. En d'autres termes, le noyau du morphisme homogène $x - \lambda \mathrm{id}$ est non vide, donc égal à M tout entier. On voit que si le degré de x est non nul, nécessairement $\lambda = 0$. On conclut la démonstration en remarquant qu'un élément central quelconque est une somme finie d'éléments centraux homogènes. □

Définition 3.5.3. Soit M un **A**-module. On appelle sous-module de M maximal (resp. minimal) s'il est un élément maximal (resp. minimal) parmi l'ensemble des sous-modules différents de M.

On peut noter qu'un sous-**A**-module N de M est minimal si et seulement si il est irréductible, et qu'il est maximal si et seulement si M/N est irréductible.

Lemme 3.5.4. Un **A**-module M de type fini admet un sous-**A**-module maximal.

Démonstration. Conséquence du lemme de Zorn. □

Définition 3.5.4. Soit M un **A**-module. M est dit noethérien s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) tout ensemble non vide de sous-**A**-modules de M possède un élément maximal,

(ii) toute suite croissante de sous-**A**-modules est stationnaire à partir d'un certain rang,

(iii) tout sous-**A**-module est de type fini.

Définition 3.5.5. Soit M un **A**-module. M est dit artinien s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) tout ensemble non vide de sous-**A**-modules de M possède un élément minimal,

(ii) toute suite décroissante de sous-**A**-modules est stationnaire à partir d'un certain rang.

Remarque 3.5.1. Soit $\mathbb{k}$ un corps. Un **A**-module M fini (de dimension finie sur $\mathbb{k}$) est noethérien et artinien.

Lemme 3.5.5. Tout sous-**A**-module et tout quotient d'un **A**-module noethérien (resp. artinien) est noethérien (resp. artinien).
Une somme directe finie de **A**-modules noethériens (resp. artiniens) est noethérien (resp. artinien).

Démonstration. La première assertion est évidente. Quant à la seconde, il suffit de la prouver dans le cas d'une somme directe de deux modules. Soient donc M_1 et M_2 deux modules noethériens. On considère une suite croissante $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots$ (resp. une suite décroissante $N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots$) de sous-modules N_j de $M = M_1 \oplus M_2$. Alors les suites $p_1(N_j)$ et $M_2 \cap N_j$ sont stationnaires (p_1 est la projection de M sur M_1). Il suffit alors de montrer que si $N' \subseteq N$ sont deux sous-modules de M, $p_1(N) = p_1(N')$ et $M_2 \cap N = M_2 \cap N'$ implique $N = N'$. En effet, soient $x \in N$ et $x = x_1 + x_2$ sa décomposition sur M_1 et M_2. $p_1(N) = p_1(N')$ implique qu'il existe $x' \in N'$ admettant $x' = x_1 + x'_2$ pour décomposition, avec $x'_2 \in M_2$. Ainsi $x - x' \in M_2 \cap N = M_2 \cap N' \subseteq N'$, ce qui prouve que $x \in N'$. $\square$

Corollaire 3.5.1. Tout module de type fini sur une algèbre noethérienne (resp. artinienne) à gauche est noethérien (artinien).

Démonstration. Tout module de type fini est un quotient d'une somme directe finie de copies de l'algèbre. $\square$

Définition 3.5.6. Soit M un **A**-module, son radical rad(M) est l'intersection de ses sous-**A**-modules maximaux, avec la convention qu'une intersection vide est M tout entier.

Les définitions précédentes s'appliquent à une algèbre **A**, considérée comme **A**-module à gauche ou à droite (ce que l'on précisera). En d'autres termes, les énoncés peuvent être réécrits en remplaçant sous-**A**-module par idéal à gauche ou par idéal à droite.

Lemme 3.5.6. Soit M un **A**-module, on a alors

$$\mathrm{rad}\big(\mathrm{M}/\mathrm{rad}(\mathrm{M})\big) = 0\ . \tag{3.1}$$

Lemme 3.5.7. Soit M un **A**-module complètement réductible. Alors le radical de M est nul.

Démonstration. La démonstration provient de [22, lemme 2.7.b]. Soit la décomposition $M = \bigoplus_\lambda N_\lambda$ avec chaque N_λ irréductible. Alors $P_\lambda = \bigoplus_{\lambda' \neq \lambda} N_\lambda$ est maximal. L'intersection des P_λ étant vide, on en déduit le lemme. □

Lemme 3.5.8. Soit M un **A**-module tel que $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, où chaque N_λ est irréductible. Si P est un sous-**A**-module de M, alors il existe une partie $\Lambda' \subseteq \Lambda$ telle que $M = \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda'} N_\lambda\right) \oplus P$.

Démonstration. La démonstration provient de [22, lemme 2.4]. En appliquant le lemme de Zorn, on trouve une partie maximale Λ' de Λ telle que la somme $M' = \sum_{\lambda\in\Lambda'} N_\lambda + P$ soit directe. Supposons que cette somme ne soit pas M tout entier, alors il existe $N_1 = N_\lambda$ telle $M' + N_1$ contienne strictement M'. N_1 étant irréductible, $M' \cap N_1$ est soit vide, soit N_1 entier. Le premier cas est impossible par maximalité de Λ', le deuxième également car cela impliquerait que M' contienne N_1. C'est absurde. □

Notons $\mathbf{S}(M)$ le réseau des sous-**A**-modules de M, muni de la relation d'inclusion et des opérations intersection et somme.

Théorème 3.5.1. Soit M un **A**-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est complètement réductible,

(ii) $M = \sum \{N \in \mathbf{S}(M)\ /\ N$ irréductibble$\}$,

(iii) $\mathbf{S}(M)$ est complémenté,

(iv) $\mathbf{S}(P)$ est complémenté pour tout sous-**A**-module P.

Démonstration. La démonstration provient de [22, proposition 2.4]. (i) implique (ii) est clair. (ii) implique (iii) est une conséquence du lemme 3.5.8. Supposons (iii) vrai. Soit un N un sous-module de P, alors il existe $N_1 \in \mathbf{S}(M)$ tel que $M = N \oplus N_1$. Or $P = P \cap (N \oplus N_1) = N \oplus (N_1 \cap P)$ (c'est la loi modulaire), ce qui prouve (iv).
Supposons (iv) vérifié et montrons (i). Le but est de prouver que si Q est

un sous-module de M, différent de M, alors il existe N irréductible telle que $Q \cap N = 0$. On peut alors conclure par le lemme de Zorn encore. Soit $x \in M - Q$, et supposons (en utilisant le lemme de Zorn) Q maximal pour cette propriété. En prenant $P = M$, on voit qu'il existe N tel que $M = Q \oplus N$. Soient $y \in Q$ et $z \neq 0 \in N$ tels que $x = y + z$. La maximalité de Q entraîne l'irréductibilité de N. En effet, soit N_1 un sous-module non vide de N, alors $x \in Q \oplus N_1$ et par suite $z \in N_1$. On voit alors que tout couple de sous-modules non vides de N ont une intersection non vide, or $\mathbf{S}(N)$ étant complémenté, il faut pour cela que N soit irréductible. □

Corollaire 3.5.2. Soit M un **A**-module complètement réductible. Alors tout sous-**A**-module et quotient de M l'est aussi.

Démonstration. Pout un sous-module, c'est immédiat d'après le (iv) du théorème précédent. Pour un quotient, le (iii) permet de voir qu'il est isomorphe à un sous-module. □

Proposition 3.5.1. Supposons que **A** soit semi-simple et supposons de plus que **A** soit noethérien ou artinien. Alors le nombre d'idéaux à gauche minimaux de **A** est fini, à isomorphisme de **A**-module à gauche près.

Démonstration. **A** s'écrit comme la somme directe (en tant que **A**-module à gauche) d'idéaux à gauche minimaux. Cette somme est nécessairement finie d'après la propriété de stationnarité des algèbres noethérienne ou artinienne. Soit alors un idéal à gauche minimal, en considérant les projections liées à la décomposition en somme directe de **A** et en utilisant le lemme de Schur, on voit que cet idéal est isomorphe à l'un des idéaux de la décomposition, ce qui conclut la preuve. □

Proposition 3.5.2. Un **A**-module M est de type fini est complètement réductible si et seulement s'il est artinien et de radical nul.

Démonstration. La démonstration provient de [22, proposition 2.7]. Prouvons le sens direct. Le lemme 3.5.7 assure rad(M) $= 0$. Le fait qu'il soit de type fini impose à la décomposition de M en somme directe d'irréductibles d'être finie. En utilisant le lemme 3.5.8, on trouve alors facilement parmi tout ensemble non vide de sous-modules un élément minimal.
Réciproquement, supposons que M est artinien et de radical nul. Soit Λ l'ensemble des sous-modules N_λ maximaux. M étant artinien, il existe un module minimal parmi les intersections finies de sous-modules N_λ. Montrons

que cette intersection $P = N_{\lambda_1} \cap \cdots \cap N_{\lambda_n}$ est vide. Dans le cas contraire, l'intersection des N_λ étant vide, il existerait un λ tel que P ne soit pas inclus dans N_λ, contredisant la minimalité de P. On a donc un morphisme injectif de M vers $(M/N_{\lambda_1})\oplus\cdots\oplus(M/N_{\lambda_n})$, or les M/N_{λ_1} étant irréductibles, le corollaire 3.5.2 prouve que M est complètement irréductible. M étant artinien, la décomposition de M en somme directe d'irréductible doit être finie. En choisissant un élément non nul parmi chacun de ces irréductibles, on trouve alors une famille finie génératrice. $\square$

Corollaire 3.5.3. Soit M un $\mathbf{A}$-module artinien, alors $M/\mathrm{rad(M)}$ est complètement réductible (et de type fini).

Démonstration. Immédiat d'après la proposition précédente et le lemme 3.5.6. $\square$

Lemme 3.5.9. Soient M_1 et M_2 deux $\mathbf{A}$-modules, et $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M_1, M_2)$, alors $\varphi(\mathrm{rad(M_1)}) \subseteq \mathrm{rad(M_2)}$

Démonstration. La démonstration provient de [22, lemme 4.1]. Soit N un sous-module de M_2. On a un morphisme injectif induit de $M_1/\varphi^{-1}(N)$ vers $M2/N$. Supposons N maximal, alors M_2/N est simple, ce qui implique $\varphi^{-1}(N) = M_1$ ou $M_1/\varphi^{-1}(N)$ simple. Dans les deux cas, $\varphi^{-1}(N)$ contient le radical de M_1. Ainsi on a prouvé que $\varphi^{-1}(\mathrm{rad(M_2)})$ contenait $\mathrm{rad(M_1)}$, ce que l'on cherchait. $\square$

Corollaire 3.5.4. Soit M un $\mathbf{A}$-module, alors $(\mathrm{radA}).\mathrm{M} \subseteq \mathrm{radM}$.

Démonstration. En considérant les morphismes de $\mathbf{A}$-module de $\mathbf{A}$ vers M induit par chaque élément de M : $a \mapsto a.x$, le lemme précédent permet de conclure. $\square$

Proposition 3.5.3. Soit $\mathbf{A}$ une algèbre artinienne. Alors à isomorphisme (de $\mathbf{A}$-module gradué) et décalage de graduation près, le nombre de $\mathbf{A}$-modules irréductibles est fini.

Démonstration. Le seul sous-module maximal du module irréductible M est 0. Ainsi M est de radical nul et le corollaire précédent montre que l'on peut alors considérer M comme un $\mathbf{A}'$-module (irréductible), où $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'/\mathrm{rad}\mathbf{A}$ est une algèbre semi-simple et artinienne (car complètement réductible et artinienne en tant que $\mathbf{A}$-module et donc en tant que $\mathbf{A}'$-module), d'après le corollaire 3.5.3 et le lemme 3.5.5. Un $\mathbf{A}'$-module irrédutible étant isomorphe (à décalage de graduation près) à un quotient de $\mathbf{A}'$ par un idéal maximal, la complémentarité de $\mathbf{S}(\mathbf{A}')$ montre que M est $\mathbf{A}'$-isomorphe à un idéal minimal de $\mathbf{A}'$. La proposition 3.5.1 permet de conclure. □

3.6 Suites de composition

Définition 3.6.1. Soit M un $\mathbf{A}$-module, on appelle suite de composition de M, de longueur n une suite (ou une tour) de sous-modules

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq \cdots \leq M_n = M \ , \tag{3.2}$$

tels que les quotients respectifs M_{i+1}/M_i soient irréductibles.

Le théorème suivant, dit de Jordan-Hölder, est fondamental :

Théorème 3.6.1. Etant données deux suites de composition pour un module M, leurs longueurs sont égales et il existe une bijection de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ qui identifie à isomorphisme près les quotients irréductibles des deux suites, qu'on appelle les facteurs de composition de M.

Démonstration. Ce théorème se démontre à l'aide du théorème de raffinement de Schreier. Pour une preuve détaillée de ces deux théorèmes, énoncés dans le cadre général des groupes avec opérateurs, on peut consulter [11, chapitre 3]. Les démonstrations s'adaptent sans difficultés au cas d'une graduation. □

Proposition 3.6.1. un $\mathbf{A}$-module M admet une suite de composition si et seulement s'il est noethérien et artinien.

Démonstration. [11, chapitre 3]. □

3.7 Théorèmes de Krull-Schmidt

La plupart des preuves des résultats de cette section sont faites dans [11, chapitre 3, section 3.4], elles s'adaptent sans difficulté au cas des graduations.

Définition 3.7.1. Un $\mathbf{A}$-module M gradué est dit indécomposable si $M \neq 0$ et s'il ne peut s'écrire comme somme directe de deux sous-modules gradués non triviaux.

Définition 3.7.2. Une $\Bbbk$-algèbre $\mathbf{A} \neq 0$ graduée est dite indécomposable si elle ne peut s'écrire comme le produit direct deux sous-algèbres graduées.

Proposition 3.7.1. Soit $\mathbf{A}$ une $\Bbbk$-algèbre graduée et M un $\mathbf{A}$-module gradué. Alors $\mathbf{A}$ est indécomposable si et seulement si 0 et 1 sont ses seuls idempotents centraux homogènes.

Démonstration. La démonstration est adaptée de [8, lemme 2.4.9].
Supposons qu'il existe un élément idempotent central homohène non trivial (différent de 0 et 1). Notons le e et soit $f = 1 - e$. f est alors un idempotent central homogène (e et 1 étant idempotents, ils sont de même degré nul), orthogonal à e ($ef = fe = 0$). $e\mathbf{A} = \mathbf{A}e = e\mathbf{A}e$ et $f\mathbf{A} = \mathbf{A}f = f\mathbf{A}f$ sont deux sous-algèbres unitaires graduées non nulles de $\mathbf{A}$ orthogonales, et 1 étant la somme de e et f, on voit alors que $\mathbf{A}$ est le produit direct de ces deux algèbres.
Réciproquement, supposons que $\mathbf{A}$ soit le produit non trivial de $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$. $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ sont deux idempotents centraux homogènes non triviaux. □

Proposition 3.7.2. Un $\mathbf{A}$-module M (gradué) est indécomposable si et seulement si $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$ n'admet que 0 et id comme élément idempotent.

Démonstration. [11, chapitre 3, proposition 3.1]. □

Définition 3.7.3. Une $\Bbbk$-algèbre sans graduation est dite locale si l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal bilatère.

Remarque 3.7.1. L'idéal des éléments non inversibles d'une algèbre locale est l'unique idéal bilatère maximal, c'est un maximum donc parmi l'ensemble des idéaux.

Une $\Bbbk$-algèbre locale n'admet que 0 et 1 comme élément idempotent. En effet supposons qu'il existe e idempotent, différent de 0 et 1, alors $e(1 - e) = 0$, donc e et $1 - e$ sont non inversibles et leur somme 1 appartient à l'idéal des éléments non inversibles, ce qui absurde.

Définition 3.7.4. Un $\mathbf{A}$-module M (gradué) est dit fortement indécomposable si $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$ est locale.

Remarque 3.7.2. Fortement indécomposable implique indécomposable.

Théorème 3.7.1. Soit M et N deux $\mathbf{A}$-module M (gradués) tels que

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \ , M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \ , \tag{3.3}$$

tels que les M_j soient fortement indécomposables et les N_j indécomposables. On suppose de plus que $M \cong N$. Alors $m = n$ et il existe une permuation qui à j associe j' et telle que $M_j \cong N_{j'}$.

Démonstration. [11, chapitre 3, thèorème 3.6]. □

Définition 3.7.5. Soit M **A**-module (gradué) et f un endomorphisme (gradué) de M.
On note $f^{\infty}M = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(M)$ et $f^{-\infty}0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} Ker(f^n)$.

Le lemme suivant, appelé lemme de Fitting, va jouer un rôle clé :

Lemme 3.7.1. Soit f un endomorphisme (gradué) d'un **A**-module M (gradué) qui est à la fois artinien et noethérien. Alors on a la décompostion de Fitting :

$$M = f^{\infty}M \oplus f^{-\infty}0 \ . \tag{3.4}$$

De plus, la restriction de f à $f^{\infty}0$ est un automorphisme et la restriction à $f^{-\infty}0$ est nilpotente.

Démonstration. [11, chapitre 3, Fitting's Lemma]. □

Ce lemme est clé de deux manières. Il est une pierre indispensable à la démonstration du théorème de Krull-Scmidt, et il admet une généralisation utile qui va directement se transmettre au théorème précédemment évoqué.

Lemme 3.7.2. On suppose ici que $\Bbbk$ est un corps.
Soit f un endomorphisme (gradué) d'un **A**-module M (gradué) noethérien et dont les espaces homogènes sont de dimension finie. Alors on a la décompostion de Fitting :

$$M = f^{\infty}M \oplus f^{-\infty}0 \ . \tag{3.5}$$

De plus, la restriction de f à $f^{\infty}M$ est un automorphisme et la restriction à $f^{-\infty}0$ est nilpotente.

Démonstration. On va adapter la démonstration classique du lemme de Fitting.
Soit $ginG$ et M_g l'espace homogène correspondant. On définit $f_g^{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_g M_g$, où $f_g : M_g \to M_g$ est $\Bbbk$-linéaire. $f_g^{\infty}M_g$ étant inclus dans M_g pour tout g, la somme $\bigoplus_g f_g^{\infty}M_g$ est directe, et voit qu'elle est égale à $f^{\infty}M$. On a la suite d'inclusion suivante :

$$M_g \supseteq f_g(M_g) \supseteq f_g^2(M_g) \supseteq \cdots \tag{3.6}$$

et puisque M_g est de dimension finie, cette dernière est stationnaire, i.e. il existe s_g tel que $f_g^{s_g}(M_g) = f_g^{s_g+1}(M_g) = \cdots = f_g^{\infty} M_g$.
On a également la suite d'inclusions

$$0 \subseteq Ker(f) \subseteq Ker(f^2) \cdots \tag{3.7}$$

et puisque M est noethérien, il existe r tel que $Ker(f^t) = Ker(f^{t+1}) = \cdots f^{-\infty}0$.
Soit $x \in f^{\infty}M \cap f^{-\infty}0$. $x = \sum_g x_g$, où les x_g sont presque tous nuls, donc il existe $s \geq t$ et y tel que $x = f^s(y)$. $f^t(x) = 0$ implique que $y \in Ker(f^{s+t}) = Ker(f^t) = Ker(f^s)$, par suite $x = 0$. Soit à présent $xinM$, en utilisant encore le fait que les x_g de la décomposition graduée sont presque tous nuls, on voit qu'il existe $s \geq t$ et y tel que $f^s(x) = f^{2s}(y)$. Ainsi $f^s(x - f^s(y)) = 0$ et $x = f^s(y) + z$, avec $z \in Ker(f^s) = Ker(f^t) = f^{-\infty}0$. On a prouvé que $M = f^{\infty}M \oplus f^{-\infty}0$.
$Ker(f^t) = f^{-\infty}0$ implique f restreint à $f^{-\infty}0$ est nilpotent.
Soit $y \in f_g^{\infty}M_g$. Puisque $f_g^{\infty}M_g = f_g^{s_g}(M_g) = f_g^{s_g+1}(M_g)$, il existe un antécédent par f_g de y dans $f_g^{\infty}M_g$. Or $f^{\infty}M = \bigoplus_g f_g^{\infty}M_g$, ce qui prouve que f resreinte à $f^{\infty}M$ est surjective. L'injectivité est une conséquence de $f^{\infty}M \cap f^{-\infty}0 = 0$. □

Théorème 3.7.2. Soit M un **A**-module (gradué) indécomposable artinien et noethérien (resp. noethérien et dont les espaces homogènes sont de dimension finie dans le cas où $\Bbbk$ est un corps). Alors tout endomorphisme (gradué) de M est soit nilpotent, soit un automorphisme. De plus M est fortement indécomposable.

Démonstration. [11, chapitre 3, théorème 3.7]. □

Théorème 3.7.3. Soit M un **A**-module (gradué) artinien ou noethérien, alors M contient des sous-modules indécomposables M_j tels que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$.

Démonstration. Le théorème 3.8 de [11] requiert que M soit à la fois artinien et noethérien. Toutefois, l'une ou l'autre des deux hypothèses suffit, on pourra consulter [22, chapitre 5, proposition 5.1] pour une démonstration. □

La conclusion de cette section est le théorème de Krull-Schmidt, ou plutôt dans notre cas les théorèmes :

Théorème 3.7.4. Soit M un $\mathbf{A}$-module (gradué) indécomposable artinien et noethérien (resp. noethérien et dont les espaces homogènes sont de dimension finie dans le cas où $\Bbbk$ est un corps) et soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ deux décompositions en sous-modules indécomposables de M. Alors $m = n$ et il existe un permutation envoyant j sur j' telle que $M_j \cong N_{j'}$.

Démonstration. Conséquence des théorèmes 3.7.1, 3.7.2 et 3.7.3. □

3.8 Extension des scalaires

Explicitons comment étendre le corps des scalaires. $\Bbbk$ désigne un corps. Une manière équivalente de définir une $\Bbbk$-algèbre $\mathbf{A}$ (j'anticipe la troisième définition annoncée plus tôt) est la donnée d'un $\Bbbk$-espace vectoriel ($\Bbbk$-module) et d'une application $\Bbbk$-bilinéaire qui vérifient les propriétés d'associativité et d'existence d'un élément neutre. $\mathbf{A}$ possède une base et la donnée de l'application bilinéaire se réduit a celle de ses valeurs sur les couples d'éléments de la base. Soit $\Bbbk'$ une extension de $\Bbbk$, on étend alors $\mathbf{A}$ aux scalaires $\Bbbk'$ en considérant le $\Bbbk$-espace vectoriel de base celle de $\mathbf{A}$ et la multiplication définie par les valeurs de l'originale sur les couples de la base. Il est facile alors de voir que l'on définit bien une $\Bbbk'$-algèbre. On procède de même pour le module M en remarquant que sa connaissance se réduit à celle des actions des éléments de la base de $\mathbf{A}$ sur chaque élément de la base de M
Une autre manière de voir cette extension de scalaire est de tensoriser la $\Bbbk$-algèbre $\mathbf{A}$ avec $\Bbbk'$ sur $\Bbbk$ et de tensoriser le $\Bbbk$-espace vectoriel M avec $\Bbbk'$ sur $\Bbbk$. D'après les propriétés du produit tensoriel, on a $\mathrm{End}_{\Bbbk'}(M \otimes_{\Bbbk} \Bbbk') \cong \mathrm{End}_{\Bbbk}(M) \otimes_{\Bbbk} \Bbbk'$. En terme de représentation on définit alors naturellement un morphisme de $\Bbbk'$-algèbre unitaire de $\mathbf{A} \otimes_{\Bbbk} \Bbbk'$ vers $\mathrm{End}_{\Bbbk}(M) \otimes_{\Bbbk} \Bbbk'$.

Définition 3.8.1. Dans le cas où $\Bbbk$ est un corps, un module M irréductible est dit absolument irréductible s'il le reste sur la clôture algébrique de $\Bbbk$.

Théorème 3.8.1. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
- M est absolument irréductible
- M est irréductible pour toute extension $\Bbbk'$ de $\Bbbk$
- $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M) \cong \Bbbk$
- les endomorphismes de $\mathbf{A}$-module de M sont les actions définies par les éléments de $\Bbbk$.

Démonstration. Voir [6]. □

3.9 Sous-modules essentiels et superflus - Enveloppes projectives

Dans cette section, M et N désignent des $\mathbf{A}$-modules (gradués).

Définition 3.9.1. Un sous-$\mathbf{A}$-module K de M est dit essentiel si pour tout sous-$\mathbf{A}$-module L, $K \cap L = 0$ implique $L = 0$.

Définition 3.9.2. Un sous-$\mathbf{A}$-module K de M est dit superflu si pour tout sous-$\mathbf{A}$-module L, $K + L = M$ implique $L = M$.

Définition 3.9.3. Un $\mathbf{A}$-morphisme injectif $f : N \to M$ est dit essentiel si Im(f) est un sous-$\mathbf{A}$-module essentiel de M.
Un $\mathbf{A}$-morphisme surjectif $f : M \to N$ est dit superflu si Ker(f) est un sous-$\mathbf{A}$-module superflu de M.

Définition 3.9.4. Une enveloppe projective de M est un $\mathbf{A}$-module P projectif, accompagné d'un $\mathbf{A}$-morphisme surjectif superflu $p : P \to M$.

Lemme 3.9.1. Supposons que P soit une enveloppe projective du $\mathbf{A}$-module M, alors pour tout $\mathbf{A}$-module projectif Q et tout $\mathbf{A}$-morphisme surjectif $q : Q \to M$, il existe un $\mathbf{A}$-morphisme $h : Q \to P$ surjectif (pas forcément unique) tel que $p \circ h = q$.

Le lemme est illustré sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "q"] \\ P \arrow[r, "p"'] & M \end{tikzcd}$$

Démonstration. Supposons que (P, p) soit une enveloppe projective de M. L'existence de h est assuré par la proposition 3.4.1. $p \circ h = q$ et la surjectivité impliquent que $P = \mathrm{Im(h)} + \mathrm{Ker(p)}$, et p étant superflu, on en déduit que h est surjectif. $\square$

Lemme 3.9.2. Soit (P, p) une enveloppe projective d'un $\mathbf{A}$-module S irréductible. Supposons que P admette une décomposition en somme directe de $\mathbf{A}$-modules $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$, alors $n = 1$.

Démonstration. Les images de ces sous-modules ne peuvent être toutes nulles car p est non nul. Par irréductibilité de S, l'une d'elles est donc S tout entier. Or p étant superflu, cela signifie que P est égal au sous-module correspondant. $\square$

Lemme 3.9.3. Soit K un sous-$\mathbf{A}$-module superflu de $M \neq 0$. Alors K maximal implique que K est un maximum dans l'ensemble des sous-modules stricts de M.

Démonstration. Soit L un sous-module strict de M. Supposons que L ne soit pas contenu dans K, alors $K + L$ contient strictement K. Par maximalité de K, on a $K + L = M$, donc $L = M$ car K est superflu. C'est absurde. $\square$

Lemme 3.9.4. Soient S et S' deux $\mathbf{A}$-modules irréductibles non isomorphes. Alors si P et P' en sont deux enveloppes projectives respectives, P et P' ne sont pas isomorphes.

Démonstration. Supposons que P et P' soient isomorphes. On peut alors se ramener au cas $P = P'$. Les noyaux de p et p' sont deux sous-$\mathbf{A}$-modules maximaux (car S et S' sont irréductibles) et superflus. Par le lemme précédent, ils sont donc égaux. En d'autres termes, S et S' sont isomorphes, ce qui est absurde. $\square$

Corollaire 3.9.1. Soient S et S' deux $\mathbf{A}$-modules irréductibles non isomorphes, même à décalage de graduation près. Alors, il en est de même pour deux éventuelles enveloppes projectives P et P' de S et S' respectivement.

Démonstration. Supposons que P' soit isomorphe à $P\{g\}$ pour un $g \in G$. $P\{g\}$ étant une enveloppe projective de $S\{g\}$, le lemme précédent permet de conclure. $\square$

4 Catégories

La notion de catégorie nécessite de pouvoir parler, par exemple, de l'ensemble des groupes. Malheureusement, la théorie des ensembles, à travers l'axiomatisation de Zermelo-Fraenkel, soulève alors une contradiction bien connue, à savoir qu'il n'existe pas, entre autres, d'ensemble de tous les ensembles. Sans entrer dans les détails, nous admettrons alors qu'il est possible de parler de classe d'ensemble, notion que l'on distinguera de celle d'ensemble. Nous admettrons également que le traitement que nous en ferons, s'apparentant à celui des ensembles, est valide.

4.1 Premières définitions

Définition 4.1.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en

1) une classe d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (des ensembles donc),
2) pour chaque couple d'objets (X, Y), d'un ensemble que nous noterons $\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ ou $\mathrm{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ si aucune confusion n'est possible (on remarquera la différence avec les notations Hom et HOM auparavant utilisées), et dont les éléments seront appelés morphismes,
3) pour chaque triplet d'objets (X, Y, Z), d'une application de $\mathrm{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \times \mathrm{hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ dans $\mathrm{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$, appelée composition et notée $\circ$.

Elle vérifie en outre les deux axiomes suivants :

C1 (Associativité) si $f \in \mathrm{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $g \in \mathrm{hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ et $h \in \mathrm{hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{W})$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,

C2 (Unité) pour tout objet X, il existe un élément $id_X \in \mathrm{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ tel que, pour tout objet Y et tout morphisme $f \in \mathrm{hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $g \in \mathrm{hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, on ait $f \circ id_X = f$ et $id_X \circ g = g$.

On remarque que l'unicité des morphismes identités est une conséquence de la définition.

Définition 4.1.2. On note $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie opposée de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$, et dont les morphismes sont définis par $\mathrm{hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ pour tout couple d'objets (X, Y).

Définition 4.1.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et f un morphisme entre X et Y. Alors

1. f est dit mono (c'est un monomorphisme) si pour tout objet Z et tout morphismes $g_1, g_2 \in \hom(\mathrm{Z}, \mathrm{X})$, $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implique $g_1 = g_2$,
2. f est dit épi (c'est un épimorphisme) si pour tout objet Z et tout morphismes $h_1, h_2 \in \hom(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ implique $h_1 = h_2$,
3. f est un isomorphisme s'il existe $g \in \hom(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ tel que $f \circ g = id_Y$ et $g \circ f = id_X$. On dit que alors que X et Y sont des objets isomorphes et on note $X \simeq Y$. On remarque de plus qu'un tel g est unique, on le note f^{-1}.

Définition 4.1.4. Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de la catégorie $\mathcal{D}$ est une catégorie dont les objets sont une sous-classe de $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, telle pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$ on ait $\hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \subseteq \hom_{\mathcal{D}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, dont la composition est induite par celle de $\mathcal{D}$ et dont les morphismes identités sont ceux de $\mathcal{D}$.
La sous-catégorie est dite pleine si $\hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \hom_{\mathcal{D}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ pour tout (X, Y) couple d'objets de $\mathcal{C}$.
La sous-catégorie est dite saturée si pour tout objet X de $\mathcal{D}$, il existe un objet Y de $\mathcal{C}$ isomorphe.

Définition 4.1.5. Soit $(\mathcal{C}_\lambda)$ une famille de catégories indexée par un ensemble Λ. On note $\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda$ et on appelle catégorie produit, la catégorie dont les objets sont les familles (X_λ) d'objets telles que $X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$ pour tout λ, dont les morphismes entre deux familles (X_λ) et (Y_λ) sont les familles (f_λ) de morphismes telles que $f_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda)$ et dont la composition est définie terme à terme.

Définition 4.1.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que l'objet X est

1. terminal si pour tout objet Y, $\hom(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ est réduit à un seul élément,
2. initial si pour tout objet Y, $\hom(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est réduit à un seul élément,
3. nul s'il est à la fois initial et terminal.

Notons qu'une catégorie ne possède, à isomorhisme près, qu'au plus un objet terminal, un objet initial et un objet nul.

Définition 4.1.7. Soit $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$.

1. Un coproduit des X_λ est la donnée d'un objet X et d'une famille de morphismes $i_\lambda : X_\lambda \to X$, vérifiant la propriété universelle suivante : si Y est un objet et $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ une famille de morphismes, alors il existe un unique morphisme $f : X \to Y$ tel que $f_\lambda = f \circ i_\lambda$.

2. Un produit des X_λ est la donnée d'un objet X et d'une famille de morphismes $p_\lambda : X \to X_\lambda$, vérifiant la propriété universelle suivante : si Y est un objet et $g_\lambda : Y \to X_\lambda$ une famille de morphismes, alors il existe un unique morphisme $g : Y \to X$ tel que $g_\lambda = p_\lambda \circ g$.

On note, que deux produits, s'ils existent, (resp. deux coproduits) sont isomorphes, de telle manière que les morphismes i_λ (p_λ associés se transportent via cet isomorphisme. On peut alors parler, s'il existe, du produit (du coproduit), que l'on note $\prod_\lambda X_\lambda$ ($\coprod_\lambda X_\lambda$). Par ailleurs, remarquons qu'un produit est un coproduit dans la catégorie opposée, et réciproquement.

Définition 4.1.8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, un objet P est dit projectif si il posseède la propriété de relèvement : pour tout morphisme $f : P \to M$ et tout morphisme épi $g : N \to M$, il existe $h : P \to N$ (pas forcément unique) tel que $h \circ g = f$.

Définition 4.1.9. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un foncteur F covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, que l'on note $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, consiste en

1. une application de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, qui X associe $F(X)$,
2. pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, d'une application de $\hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ dans $\hom_{\mathcal{C}'}(\mathrm{F(X)}, \mathrm{F(Y)})$, qui à f associe $F(f)$.

Il vérifie en outre les deux axiomes suivants :

F1 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$,

F2 $F(id_X) = id_{F(X)}$.

Définition 4.1.10. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un foncteur F contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, que l'on note $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, consiste en

1. une application de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, qui X associe $F(X)$,
2. pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, d'une application de $\hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ dans $\hom_{\mathcal{C}'}(\mathrm{F(Y)}, \mathrm{F(X)})$, qui à f associe $F(f)$.

Il vérifie en outre les deux axiomes suivants :

F1 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$,

F2 $F(id_X) = id_{F(X)}$.

On a une identification évidente entre foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ et foncteurs covariants de $\mathcal{C}^{op}$ dans $\mathcal{C}'$, ou encore foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'^{op}$. Sans précision supplémentaire, foncteur désignera à la fois foncteur

covariant et foncteur contravariant. Toutefois dans les définitions qui vont suivrent, les énoncés seront exprimés dans le cas d'un foncteur covariant, on transposera sans difficulté (ou au besoin, en s'aidant des identifications précédentes) les définitions dans le cas contravariant.
On définit de manière évidente la sous-catégorie image d'un foncteur, la composée associative de foncteurs, ou encore le foncteur (covariant) identité, que l'on note $Id_{\mathcal{C}}$.

Définition 4.1.11. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un foncteur. On dit que F stabilise $\mathcal{C}'$ si F envoie tout objet et tout morphisme de $\mathcal{C}'$ respectivement sur un objet et un morphisme de $\mathcal{C}'$. On désignera encore par F le foncteur alors induit sur la catégorie $\mathcal{C}'$.

Remarque 4.1.1. Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, F stabilise $\mathcal{C}'$ si et seulement si F stabilise les objets de $\mathcal{C}'$.

Définition 4.1.12. Un foncteur F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est dit

1. fidèle (resp. plein, resp. fidèlement plein) si toutes les applications de $\hom(X, Y) \to \hom(F(X), F(Y))$ sont injectives (surjectives, bijectives),
2. essentièlement surjectif si pour tout objet Y dans $\mathcal{C}'$, il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que $Y \simeq F(X)$.

Remarque 4.1.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$. On note Inj le foncteur (covariant) fidèle d'injection de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, Inj est fidèlement plein.

Définition 4.1.13. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, F_1 et F_2 deux foncteurs entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Un morphisme $\theta : F_1 \to F_2$ entre les foncteurs F_1 et F_2 est la donnée, pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\theta_X : F_1(X) \to F_2(X)$ de $\mathcal{C}'$ tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, $\theta_Y \circ F_1(f) = F_2(f) \circ \theta_X$.
θ est un isomorphisme de foncteurs si pour tout X, θ_X est un isomorphisme. On note alors $F_1 \cong F_2$.

Remarque 4.1.3. On définit de manière évidente la composée associative de morphismes entre foncteurs.
On note que l'isomorphie entre foncteurs est transitive, réfléxive, symétrique et compatible avec avec la composition entre foncteurs.

Définition 4.1.14. Deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dites équivalentes s'il existe un foncteur $F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et un foncteur $F_2 : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tel que $F_2 \circ F_1 \cong Id_{\mathcal{C}}$ et $F_1 \circ F_2 \cong Id_{\mathcal{C}}$. F_1 et F_2 sont dit inverses l'un de l'autre et appelés des foncteurs d'équivalence.

Remarque 4.1.4. L'équivalence entre catégories est transitive, symétrique et réfléxive.
Un foncteur d'équivalence admet un unique inverse à droite et un unique inverse à gauche.

Proposition 4.1.1. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont équivalentes si et seulement s'il existe un foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.

Démonstration. Voir [18]. □

Définition 4.1.15. Un foncteur (covariant) de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ est appelé un bifoncteur.

Définition 4.1.16. Deux foncteurs $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $R : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ sont dit auto-adjoints s'il existe un isomorphisme de foncteur entre les deux bifoncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L(\cdot), \cdot)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\cdot, R(\cdot))$ de $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}'$ dans **Ens**, la catégorie des ensembles (les morphismes sont les applications ensemblistes).
R sera appelé le foncteur adjoint à droite de L, L le foncteur adjoint à gauche de R.

4.2 Catégories additives et abéliennes

Les catégories abéliennes sont construites sur le modèle de la catégorie des groupes abéliens.

Définition 4.2.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite additive si

1) pour tout couple d'objets (X, Y), hom(X, Y) est muni d'une strucutre de groupe abélien, tels que la composition soit une application bilinéaire,
2) il existe un objet nul, noté 0,
3) pour tout couple d'objets (X, Y), il existe un coproduit, que l'on note $X \oplus Y$.

Définition 4.2.2. Une sous-catégorie additive d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, qui est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et dont les structures de groupe des ensembles de morphismes sont induites par celles de $\mathcal{C}$.

Remarque 4.2.1. Le foncteur Inj d'une sous-catégorie additive dans une catégorie additive est additif.

Définition 4.2.3. Soit $(\mathcal{C}_\lambda)$ une famille de catégories additives indexée par un ensemble Λ. On note $\bigoplus_\lambda \mathcal{C}_\lambda$ et on appelle somme directe, la sous-catégorie pleine de $\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda$ dont les objets sont les familles presque nulles.

Remarque 4.2.2. Un produit et une somme directe de catégories additives sont munis naturellement d'une structure de catégories additives, telles que la somme directe est une sous-catégorie additive du produit.

Proposition 4.2.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive, alors pour tout couple d'objets (X, Y), $X \oplus Y$ est un produit de X et Y.

Démonstration. L'énoncé de la proposition est quelque sorte incomplet car il ne spécifie pas les morphismes $p_1 : X \oplus Y \to X$ et $p_2 : X \oplus Y \to Y$. Toutefois ces derniers apparaissent de façon naturelle, voici comment. On note $i_1 : X \to X \oplus Y$ et $i_2 : Y \to X \oplus Y$ les morphismes associés au coproduit. p_1 est défini comme l'unique morphisme tel que $p_1 \circ i_1 = id_X$ et $p_1 \circ i_2 = 0$. p_2 est défini de manière analogue. Soient alors Y un objet de $\mathcal{C}$ et $g_1 : Y \to X_1$, $g_2 : Y \to X_2$ deux morphismes. On pose alors $g = i_1 \circ g_1 + i_2 \circ g_2$, qui vérifie les propriétés commutatives voulues. Il reste à montrer l'unicité. Notons pour cela l'égalité $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_{X\oplus Y}$ (utiliser la propriété universelle du coproduit) et supposons que g fasse commuter le diagramme du produit, alors $g = id_{X\oplus Y} \circ g = i_1 \circ p_1 \circ g + i_2 \circ p_2 \circ g = i_1 \circ g_1 + i_2 \circ g_2$. $\square$

Remarque 4.2.3. Il est équivalent de demander l'existence du produit dans la définition d'une catégorie additive. L'existence du coproduit s'en déduit de la même manière que dans la démonstration précédente. Cela justifie la notation $X \oplus Y$, que nous nommerons dans la suite somme directe de X et Y.
Par ailleurs les égalités $p \circ i = id$ prouvent que les morphismes assiciés au coproduit (resp. au produit) sont des monomorphismes (des épimorphismes).

Définition 4.2.4. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories additives. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sera dit additif si il induit, pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$ un morphisme de groupe de $\hom_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ dans $\hom_{\mathcal{D}}(\mathrm{F}(\mathrm{X}), \mathrm{F}(\mathrm{Y}))$.

Remarque 4.2.4. Si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie additive de la catégorie additive $\mathcal{C}$ et si le foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ stabilise $\mathcal{C}'$, alors le foncteur induit $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$ est additif.

Définition 4.2.5. Soient F et G deux foncteurs entre une catégorie $\mathcal{C}$ et une catégorie additive $\mathcal{C}'$. On définit leur foncteur somme $F \oplus G$, qui X associe $F(X) \oplus F(Y)$.

Remarque 4.2.5. La définition du foncteur somme au niveau des morphismes est évidente, et possible d'après la remarque précédente. On peut montrer par ailleurs que cette opération somme sur les foncteurs est associative et commutative (à isomorphisme de foncteur près). Si $\mathcal{C}$ est aussi additive et si F et G sont additifs, on vérifie que $F \oplus G$ l'est aussi.

Définition 4.2.6. Soient $(\mathcal{C}_\lambda)$ une famille de catégorie, $\mathcal{C}'$ une catégorie additive et $F_\lambda : \mathcal{C}_\lambda \to \mathcal{C}'$ des foncteurs. On note $\bigoplus_\lambda F_\lambda$, et on appelle somme directe des foncteurs F_λ, le foncteur qui à une famille presque nulle (X_λ) associe la somme directe dans $\mathcal{C}'$ des objets X_λ non nuls (avec la convention qu'une somme vide est nulle).

Remarque 4.2.6. La définition du foncteur somme au niveau des morphismes est évidente, et possible d'après la remarque précédente. Si les catégories $\mathcal{C}_\lambda$ sont aussi additives et les F_λ sont additifs, on vérifie que $\bigoplus_\lambda F_\lambda$ l'est aussi.

Lemme 4.2.1. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{D}$ et X, Y deux objets de $\mathcal{C}$. Si le produit (resp. le coproduit) de X et Y existent dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, alors ils coïncident dans $\mathcal{D}$.

Démonstration. Il suffit de refaire la preuve montrant l'unicité de la solution de la propriété universelle d'un produit (d'un coproduit). □

Proposition 4.2.2. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories additives. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est additif conserve les sommes directes finies.

Démonstration. Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. $F(X \oplus Y)$ est est clairement un produit (et un coproduit) de $F(X)$ et $F(Y)$ dans la catégorie image par F de $\mathcal{C}$. Le produit de $F(X)$ et $F(Y)$ dans existe dans la catégorie additive $\mathcal{D}$, le lemme précédent permet alors de conclure. □

Remarque 4.2.7. La réciproque est aussi vraie, mais plus difficile à montrer. Une preuve est faite dans [14, chapitre 8, proposition 8.2.15].

Définition 4.2.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $f : X \to Y$ un morphisme. On appelle noyau de f, s'il existe, l'unique (à isomorphisme près) couple

(K, i), où $K \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $i \in \mathrm{hom(K, X)}$, solution du problème universel suivant : $f \circ i = 0$ et si Z est un objet et $g : Z \to X$ un morphisme tel que $f \circ g = 0$, alors il existe un unique morphisme $\widehat{g} : Z \to K$ tel que $i \circ \widehat{g} = g$. On note $Ker(f)$ le noyau de f.

Définition 4.2.8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $f : X \to Y$ un morphisme. On appelle conoyau de f, s'il existe, l'unique (à isomorphisme près) couple (K', p), où $K' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $i \in \mathrm{hom(X, K')}$, solution du problème universel suivant : $p \circ f = 0$ et si Z est un objet et $g : X \to Z$ un morphisme tel que $g \circ f = 0$, alors il existe un unique morphisme $\widehat{g} : K' \to Z$ tel que $\widehat{g} \circ p = g$. On note $Coker(f)$ le conoyau de f.

Remarque 4.2.8. Un conoyau est un noyau dans la catégorie opposée, et réciproquement. On note, par ailleurs, que le morphisme i d'un noyau est mono, et le morphisme p d'un conoyau, épi. Egalement, un morphisme est mono si et seulement si son noyau existe et est 0, un morphisme est épi si et seulement si son conoyau existe et est 0. Un morphisme $f : X \to Y$ est nul si et seulement si son noyao existe et est (X, id_X), si et seulement si son conoyau existe est est (Y, id_Y).

Définition 4.2.9. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive et $f : X \to Y$ un morphisme. On note $Im(f)$ le noyau du conoyau de f, que l'on nomme l'image de f. On note $Coim(f)$ le conoyau du noyau de f, que l'on nomme la coimage de f.

Remarque 4.2.9. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans une catégorie additive.
f épi admet une image : Y.
f mono admet une coimage : X.

Définition 4.2.10. Un catégorie $\mathcal{C}$ additive est dite abélienne si tout morphisme admet un noyau et un conoyau, si tout morphisme f est strict, i.e. le morphisme naturel $Coim(f) \to Im(f)$ est un isomorphisme.

Quel est ce morphisme naturel Coim(f) $\to$ Im(f) ? Notons $p : Y \to Coker(f)$, $i : Ker(f) \to X$, $j : Im(f) \to Y$ et $\Pi : X \to Coim(f)$. $f \circ i = 0$, donc d'après la propriété du conoyau, il existe $g : Coim(f) \to Y$ tel que $g \circ \Pi = f$. Alors $p \circ g \circ \Pi = 0$, mais Π étant épi, $p \circ g = 0$. Par propriété du noyau, il existe alors $h : Coim(f) \to Im(f)$ tel que $j \circ h = g$. C'est ce h que l'on impose isomorphe dans la définition d'une catégorie abélienne. On note de plus que c'est l'unique morphisme tel que $j \circ h \circ \Pi = f$.

Remarque 4.2.10. Un produit et une somme directe de catégories abéliennes sont des catégories abéliennes pour leurs structures naturelles de catégories additives (voir la remarque 4.2.2).

Remarque 4.2.11. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans une catégorie abélienne.
f mono admet une image : (X, f).
f épi admet une coimage : (Y, f).

Proposition 4.2.3. Un morphisme à la fois mono et épi, dans une catégorie abélienne, est un isomorphisme.

Démonstration. Soit f un tel morphisme. D'après la même remarque 4.2.9, $Im(f)$ est Y et $Coim(f)$ est X. On conclut d'après le dernier axiome des catégories abéliennes et en remarquant que f est bien sûr l'unique h naturel entre la coimage et l'image de f $(id_Y \circ f \circ id_X = f)$. □

La réciproque est bien sûr vrai dans toute catégorie.

Proposition 4.2.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $f : X \to Y$ un morphisme. f se décompose sous la forme

$$X \to Im(f) \to Y \ , \tag{4.1}$$

où $p : X \to Im(f)$ est épi, $i : Im(f) \to Y$ est mono.

Démonstration. i est mono car c'est le morphisme associé à un noyau (le noyau du conoyau de f). La catégorie étant abélienne, l'image et la coimage de f sont isomorphes, on pose alors p l'épimorphisme de X dans le conoyau du noyau de f. Reste à voir que $f = i \circ p$, mais cela découle du fait même que $i \circ h \circ p = f$, où $h : Coim(f) \to Im(f)$ est l'isomorphisme naturel. □

Définition 4.2.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Une suite exacte courte de $\mathcal{C}$ est une suite

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \tag{4.2}$$

telle que le morphisme $f : X \to Y$ soit mono, le morphisme $g : Y \to Z$ épi et telle que (X, f) est le noyau de g.
La suite exacte courte est dite scindée s'il existe une section $h : Z \to Y$, i.e. vérifiant $g \circ h = id_Z$.

Remarque 4.2.12. Dans une catégorie abélienne, il aurait été équivalent de définir une suite exacte courte comme étant une suite telle que le morphisme $f : X \to Y$ soit mono, le morphisme $g : Y \to Z$ épi et telle que $Im(f) = Ker(g)$ (f étant mono, (X, f) est l'image de f d'après la remarque 4.2.11). Cette définition est plus naturelle mais n'était pas exprimable dans le cadre des catégories additives.

Proposition 4.2.5. Soit $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ une suite exacte courte de $\mathcal{C}$ d'une une catégorie abélienne $\mathbf{C}$. Alors (X, f) est l'image de $f : X \to Y$ et (Z, g) est le conoyau de f. Toute suite exacte courte peut ainsi se réécrire $0 \to Im(f) \to Y \to Coker(f) \to 0$.

Démonstration. On a déjà montré que (X, f) était l'image de f. Par exactitude de la suite, (X, f) est donc le noyau de g. Le conoyau de f est alors la coimage de g, c'est-à-dire l'image de g, ou encore Z car g est épi. □

Proposition 4.2.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Une suite exacte courte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ est scindée si et seulement si Y est la somme directe de X et Z.

Démonstration. Supposons la suite scindée et soit $h : Z \to Y$ la section : $g \circ h = id_Z$. On définit $p : Y \to Y$ par $q = id_Y - (h \circ g)$. Alors $g \circ p = 0$, et par exactitude de la suite, il existe $q : Y \to X$ tel que $f \circ q = p$ ((X, f) est le noyau de g). Par ailleurs, $p \circ f = f - h \circ g \circ f = f$, donc $f \circ q \circ f = f$ et f étant mono $q \circ f = id_X$. $p \circ h = h - h \circ g \circ h = h - h = 0$, donc $f \circ q \circ h = 0$ et f étant mono $q \circ h = 0$. Ces deux égalités, combinées avec $g \circ f = 0$ et $g \circ h = id_Z$ permettent de voir que, pour W un objet de $\mathbf{C}$ et a, b deux morphismes respectivement de X et Z, dans W, le morphisme $c : Y \to W$, défini par $c = (a \circ q) + (b \circ g)$, fait commuter le diagramme du coproduit. L'égalité $id_Y = p + h \circ g$ prouve l'unicité : soit c un morphisme qui fait commuter le diagramme, alors $c = c \circ p + c \circ h \circ g = (c \circ f) \circ q + (c \circ h) \circ g = a \circ f + b \circ g$. Réciproquement, supposons $Y = X \oplus Z$. D'après la fin de la remarque 4.2.3, la suite canonique $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ sera seracte si l'on réussit à montrer que $X = Ker(p)$, où $i : X \to Y$ et $p : Y \to Z$. Soit W un objet et $f : W \to Y$ un morphisme tel que $p \circ f = 0$, alors en notant q la projection de Y dans X, on a $i \circ (q \circ f) = 0$. Soit par ailleurs $g : W \to X$ tel que $i \circ g = f$, alors $q \circ f = g$. (X, i) est donc le noyau de p, la suite est donc exacte. L'injection de Z dans Y fournit la section, prouvant que la suite est également scindée. □

Définition 4.2.12. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories additives. Un foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est dit

- exact si pour toute suite exacte courte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ est exacte,
- exact à gauche si pour toute suite exacte courte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ est exacte,
- exact à droite si pour toute suite exacte courte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ est exacte.

4.3 Groupes de Grothendieck

Définition 4.3.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. On appelle groupe de Grothendieck, et on note $G(\mathcal{C})$, le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$), quotienté par le sous-groupe engendré par les éléments

$$[X] - [X_1] - [X_2] \text{ , où } X \text{ est la somme directe de } X_1 \text{ et } X_2. \tag{4.3}$$

Définition 4.3.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. On appelle de nouveau groupe de Grothendieck, et on note $G_0(\mathcal{C})$, le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$, quotienté par le sous-groupe engendré par les éléments

$$[X] - [X_1] - [X_2] \text{ , où } 0 \to X_1 \to X \to X_2 \to 0 \text{ est une suite exacte courte.} \tag{4.4}$$

On note que pour une catégorie additive, on a un morphisme de groupe surjectif canonique de $G(\mathcal{C})$ vers $G_0(\mathcal{C})$ (en effet, la deuxième partie de la preuve de la proposition 4.2.6 montre en particulier qu'une décomposition en somme directe permet d'écrire une suite exacte).

Remarque 4.3.1. Soient $(\mathcal{C}_\lambda)$ une famille de catégories additives. On a les isomorphismes de groupe (naturels) :

$$\begin{aligned} G_0\Big(\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda\Big) &\cong \prod_\lambda G_0(\mathcal{C}_\lambda) \ , \\ G\Big(\prod_\lambda \mathcal{C}_\lambda\Big) &\cong \prod_\lambda G(\mathcal{C}_\lambda) \end{aligned}$$

et les isomorphismes

$$G_0\Big(\bigoplus_\lambda \mathcal{C}_\lambda\Big) \;\cong\; \bigoplus_\lambda G_0(\mathcal{C}_\lambda)\ ,$$
$$G\Big(\bigoplus_\lambda \mathcal{C}_\lambda\Big) \;\cong\; \bigoplus_\lambda G(\mathcal{C}_\lambda).$$

Proposition 4.3.1. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur additif entre deux catégories additives. Alors F induit un morphisme de groupe $[F] : G(\mathcal{C}) \to G(\mathcal{C}')$.

Démonstration. La définition d'un foncteur permet de voir que l'application qui, à la classe d'isomorphisme $[X]$, où $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, associe $[F(X)]$, est bien définie. La proposition 4.2.2 permet de voir qu'elle passe au quotient. □

Proposition 4.3.2. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur exact entre deux catégories additives. Alors F induit un morphisme de groupe $[F] : G_0(\mathcal{C}) \to G_0(\mathcal{C}')$.

Démonstration. Immédiat. □

Définition 4.3.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. On dit que $\mathcal{C}$ est semi-simple si toute suite exacte courte de $\mathcal{C}$ se scinde.

Remarque 4.3.2. Le produit et la somme directe de catégories additives semi-simples sont semi-simples pour les structures de catégorie additive naturelles (voir la remarque 4.2.2).

Proposition 4.3.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive semi-simple. Les deux groupes de Grothendieck $G(\mathcal{C})$ et $G_0(\mathcal{C})$ coïncident.

Démonstration. Immédiat d'après 4.2.6. □

Définition 4.3.4. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie additive. Un objet X est dit

1. irréductible si les seuls monomorphismes de but X sont $0 : 0 \to X$ et $id_X : X \to X$,
2. indécomposable si $X = X_1 \oplus X_2$ implique $X_1 = 0$ ou $X_2 = 0$.

Définition 4.3.5. Une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ possède la propriété des suites de composition si pour tout objet X

1) il existe une suite, appelée suite de composition, $0 = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \to X_n = X$, telle que les morphismes $i_j : X_j \to X_{j+1}$ soient mono et telle que les les conoyaux $Coker(i_j)$ soient irréductibles (on appelle n sa longueur),

2) deux suites de composition sont de même longueur et il existe une bijection qui envoient, à isomorphisme près, les conoyaux de l'une sur les conoyaux de l'autre, qu'on appelle les facteurs de composition de X.

Définition 4.3.6. Une catégorie additive $\mathcal{C}$ possède la propriété de Krull-Schmidt si

1) X est la somme directe finie d'objets indécomposables,
2) deux décompositions directes finies en indécomposables font intervenir le même nombre d'objets et il existe une bijection qui envoient, à isomorphisme près, les indécomposables d'une décomposition sur les indécomposables de l'autre.

Proposition 4.3.4. Soit $([X_\lambda])_{\lambda\in\Lambda}$ la famille complète et sans répétition des classes d'isomorphismes des objets irréductibles d'une sous-catégorie abélienne pleine $\mathcal{C}$ de $\mathbf{A}-$Mod stable par passage aux sous-modules, $\mathcal{C}$ possèdant la propriété des suites de composition. Alors $G_0(\mathcal{C})$ est un groupe abélien libre de base $([X_\lambda])$.

Démonstration. Soit φ le morphisme canonique de groupe abélien du groupe libre F, engendré par les classes d'isomorphismes d'objets irréductibles, dans $G_0(\mathcal{C})$. L'existence de suites de composistion prouve la surjectivité de φ. De même, l'existence et l'unicité de suites de composition permet de définir un morphisme canonique ψ du groupe libre engendré par les classes d'équivalence d'objets de $\mathcal{C}$ dans F (une suite de composition est envoyée sur la somme des classes de ses conoyaux). Soit $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ une suite exacte, $0 = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \to X_n = X$ une suite de compositon de X et $0 = Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_{m-1} \to Z_m = Z$ une suite de composition de Z. Alors $0 = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n = X \to p^{-1}(Z_1) \to \cdots p^{-1}(Z_m) = Y$ est une suite de composition de Y, où $p : Y \to Z$ morphisme de la suite exacte, justifiant le passage au quotient $G_0(\mathcal{C})$. On vérifie immédiatement que $\psi \circ \varphi = id$ sur les générateurs de F. φ est donc un isomorphisme et prouve que $([X_\lambda])$ est un base. □

Proposition 4.3.5. Soit $([Y_\lambda])_{\lambda\in\Lambda}$ la famille complète et sans répétition des classes d'isomorphismes des objets indécomposables d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ qui possède la propriété de Krull-Schmidt. Alors $G(\mathcal{C})$ est un groupe abélien libre de base $([Y_\lambda])$.

Démonstration. On procède de la même façon que précédemment.
Soit φ le morphisme canonique de groupe abélien du groupe libre F, engendré par les classes d'isomorphismes d'objets indécomposables, dans $G(\mathcal{C})$. L'existence de décomposition directe prouve la surjectivité de φ. De même, l'existence et l'unicité de décomposition permet de définir un morphisme canonique ψ du groupe libre engendré par les classes d'équivalence d'objets de $\mathcal{C}$ dans F (une décomposition est envoyée sur la somme des classes de ses conoyaux). Si $Y = X \oplus Z$ est une décomposition en somme directe, alors les deux décompositions en somme directe d'indécomposables de X et Z fournissent une décomposition en indécomposables de Y, justifiant le passage au quotient $G(\mathcal{C})$. On vérifie immédiatement que $\psi \circ \varphi = id$ sur les générateurs de F. φ est donc un isomorphisme et prouve que $([Y_\lambda])$ est un base. □

4.4 Catégories de modules

Définition 4.4.1. Soit $\mathbf{A}$ une $\Bbbk$-algèbre (graduée). On note

1. $\mathbf{A}-$Mod la catégorie des $\mathbf{A}$-modules à gauche (gradués),
2. $\mathbf{A}-$mod la catégorie des $\mathbf{A}$-modules à gauche (gradués) de type fini,
3. $\mathbf{A}-$fmod la catégorie des $\mathbf{A}$-modules à gauche (gradués) fini,
4. $\mathbf{A}-$pmod la catégorie des $\mathbf{A}$-modules à gauche (gradués) de type fini et projectifs.

Proposition 4.4.1. Les catégories $\mathbf{A}-$Mod, $\mathbf{A}-$mod et $\mathbf{A}-$fmod sont des catégories abéliennes.

En particulier, la catégorie des modules à gauche (à droite serait aussi vrai) sur une algèbre non graduée est une catégorie abélienne. Par suite, la catégorie des groupes abéliens, les catégories des espaces vectoriels sont aussi des catégories abéliennes.

Démonstration. Le fait que ces catégories soient additives est immédiat. L'existence de noyau et de conoyau l'est aussi. Le seul point sur lequel il mérite de s'attarder est le lien entre les notions de monomorphisme et d'injection (d'épimorphisme et de surjection). Il est clair que dans ces catégories, injectif implique mono et surjectif implique épi. Réciproquement, supposons $f : X \to Y$ mono, on alors $f \circ 0 = f \circ i$ de $Ker(f)$ (le noyau ensembliste ici) dans X, où i est l'injection du noyau dans X. Par suite $i = 0$, et par injectivité, $Ker(f)$ est nul. On procède de même pour montrer que épi implique surjectif. Ce lien étant fait, on vérifie les deux derniers axiomes d'abeliennité pour les catégories concernées. □

L'équivalence des deux notions de monomorphisme et d'injection (resp. d'épimorphisme et de surjection) est encore vraie dans la catégorie des groupes (pas forcément abéliens), on pourra consulter [4, proposition 1.80 du chapitre 1, section 3] pour une démonstration de ce fait.

Proposition 4.4.2. La catégorie $\mathbf{A}-$pmod est additive.

Démonstration. Simples vérifications. □

Remarque 4.4.1. Toutefois, la catégorie $\mathbf{A}-$pmod ne peut être abélienne. Montrons-le . Soient $f : P \to Q$ un morphisme de la catégorie $\mathbf{A}-$pmod et (K, i) son noyau dans $\mathbf{A}-$pmod (on suppose qu'il existe). Soient M un module de $\mathbf{A}-$mod et $g : M \to P$ un morphisme de $\mathbf{A}-$mod tel que $f \circ g = 0$. M est le quotient d'un module libre (donc projectif) L de type fini, notons $p : L \to M$ la projection, alors $f \circ g \circ p = 0$. Par propriété du noyau dans $\mathbf{A}-$pmod, il existe un unique $h : L \to K$ tel que $i \circ h = g \circ p$. Soit x un élément du noyau (ensembliste) de p, alors $(i \circ h)(x) = 0$, par injectivité de i, on en déduit que $h(x) = 0$, donc que h passe au quotient M. L'unicité du morphisme de M dans K s'en déduit de celle de h. S'il existe, le noyau d'un morphisme entre projectifs reste donc un noyau dans la catégorie $\mathbf{A}-$mod, il s'agit alors du noyau ensembliste. Or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, noyau du morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à a associe $2a$, ne peut être projectif car il n'est pas sans torsion.

Proposition 4.4.3. La catégorie $\mathbf{A}-$pmod est semi-simple.

Démonstration. Conséquence du lemme 3.4.1. □

Corollaire 4.4.1. Les groupes de Grothendieck $G_0(\mathbf{A}-\text{pmod})$ et $G(\mathbf{A}-\text{pmod})$ coïncident.

Démonstration. Conséquence de la proposition 4.3.3. □

Remarque 4.4.2. D'après la proposition 3.4.1, les objets projectifs de $\mathbf{A}-$Mod sont les modules projectifs. D'après le lemme 3.4.2 $\mathrm{Ob}(\mathbf{A}-\text{pmod})$ est constitué des objets projectifs de $\mathbf{A}-$mod.

Lemme 4.4.1. Soit A une partie de $\mathbf{A}$ constituée d'éléments homogènes. Le foncteur qui à $M \in \mathbf{A}-$Mod (resp. $\mathbf{A}-$fmod) associe $A.M \in \Bbbk-$Mod (resp. $\Bbbk-$fmod) est additif.

Démonstration. Immédiat. $\square$

Lemme 4.4.2. Soit $a \in \mathbf{A}$ homogène idempotent. Le foncteur additif (voir le lemme précédent) qui à $M \in \mathbf{A}-$Mod (resp. $\mathbf{A}-$fmod) associe $a.M \in \mathbb{k}-$Mod (resp. $\mathbb{k}-$fmod) est exact.

Démonstration. Soit $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ une suite exacte courte de $\mathbf{A}-$Mod (resp. de $\mathbf{A}-$fmod), on note $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ les morphismes correspondants. Il est clair que l'application induite $\widetilde{f} : a.X \to a.Y$ reste injective. Soit $a.z \in a.Z$, il existe, par surjectivité de g, $y \in Y$ tel que $g(y) = z$, ce qui prouve la surjectivité de l'application induite $\widetilde{g} : a.Y \to a.Z$. On a clairement $\mathrm{Im}(\widetilde{\mathrm{f}}) \subseteq \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{g}})$. Réciproquement, soit $a.y \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{g}})$, par exactitude de la suite originale, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = a.y$. Par idempotence de a, on voit que $f(a.x) = a.y$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}(\widetilde{\mathrm{f}}) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{g}})$. $\square$

Soit ψ une anti-involution (unitaire) d'une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbf{A}$. Alors tout $\mathbf{A}$-module à droite M devient un $\mathbf{A}$-module à gauche, que l'on note M^{ψ} quand on compose l'action avec ψ, et réciproquement (la notation est alors ${}^{\psi}M$).

Proposition 4.4.4. ψ définit un foncteur (covariant) additif Ψ de la catégorie $\mathbf{A}-$Mod (resp. $\mathbf{A}-$mod, resp. $\mathbf{A}-$pmod, resp. $\mathbf{A}-$fmod) dans la catégorie Mod$-\mathbf{A}$ des modules gradués à droite (mod$-\mathbf{A}$, pmod$-\mathbf{A}$, fmod$-\mathbf{A}$), et un foncteur (covariant) additif que l'on note encore Ψ dans l'autre sens. Ces deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre.

Démonstration. Le fait que l'on ait un foncteur de $\mathbf{A}-$Mod dans Mod$-\mathbf{A}$ est immédiat, son additivité également. L'involutivité de ψ implique que les deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre (on construit canoniquement un morphisme de foncteur entre $\Psi \circ \Psi$ et le foncteur Id de $\mathbf{A}-$Mod et le foncteur Id de Mod$-\mathbf{A}$). Il est clair que Ψ stabilise les sous-catégories additives de l'énoncé, qui reste donc valable pour celles-ci. $\square$

Lemme 4.4.3. Soient M et N des $\mathbf{A}$-modules à droite gradués , on a l'égalité de $\mathbb{k}$-module gradué : $HOM_{\mathbf{A}}(M, N) = HOM_{\mathbf{A}}(M^{\psi}, N^{\psi})$.

Lemme 4.4.4. Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules à gauche gradué, on a l'isomorphisme de $\mathbb{k}$-module gradué :

$$M^{\psi} \otimes_{\mathbf{A}} N \cong N^{\psi} \otimes_{\mathbf{A}} M.$$

Démonstration. On vérifie que les applications $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ et $y \otimes x \mapsto x \otimes y$ pour $x \in M$ et $y \in N$ sont bien définies par involutivité de ψ, $\Bbbk$-linéaires, préservent les graduations et inverses l'une de l'autre. □

Démonstration. Immédiat. On peut noter que seule la bijectivité (et non l'involutivité) de l'anti-homomorphisme ψ intervient. □

Soit $M \in \mathbf{A}-\text{mod}$. D'après le lemme 3.2.2, $\text{HOM}_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A})$ est un $\Bbbk$-module gradué et on peut définir une action à droite canonique de $\mathbf{A}$ qui fait alors de $\text{HOM}_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A})$ un $\mathbf{A}$-module à droite gradué.

Proposition 4.4.5. On suppose ici que G est un groupe. Une anti-involution Du d'une $\Bbbk$-algèbre $\mathbf{A}$ définit un foncteur contravariant additif Du entre la catégorie $\mathbf{A}-\text{mod}$ (resp. $\mathbf{A}-\text{pmod}$) et elle-même :

$$Du(M) = \text{HOM}_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A})^{Du}. \tag{4.5}$$

Proposition 4.4.6. Un élément de $\text{HOM}_{\mathbf{A}}(M, \mathbf{A})^{\psi}$ est déterminé par les valeurs qu'il prend sur une famille génératrice finie de M, plus précisément cette remarque fournit un morphisme surjectif dans $\mathbf{A}-\text{Mod}$ d'un module libre de type fini dans $Du(M)$, prouvant que ce dernier est aussi de type fini. Que Du définisse un foncteur contravariant additif de la catégorie $\mathbf{A}-\text{mod}$ dans elle-même, il ne s'agit que de quelques vérifications. Par ailleurs, on remarque que $\text{HOM}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ est canoniquement isomorphe en tant que module gradué à droite à $\mathbf{A}$. Donc $Du(\mathbf{A})$ est isomorphe en tant que module gradué à gauche à $\mathbf{A}^{Du}$. Or Du réalise lui-même un isomorphisme de module gradué à gauche entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^{Du}$. Donc $Du(\mathbf{A})$ est isomorphe à $\mathbf{A}$. En outre, $Du(M\{g\}) = Du(M)\{-g\}$ pour $g \in G$. Le foncteur étant additif, d'après la proposition 4.2.2, il envoie un module libre gradué de type fini sur un module libre gradué de type fini. De même il envoie un module projectif de type fini (facteur direct d'un module libre de type fini d'après le lemme 3.4.2) sur un module projectif de type fini. $\mathbf{A}-\text{pmod}$ étant une sous-catégorie additive de $\mathbf{A}-\text{mod}$, la démonstration est terminée.

Proposition 4.4.7. Supposons que G soit un groupe, $\Bbbk$ un corps et que les espaces homogènes de $\mathbf{A}$ soient de dimension finie. Le foncteur Du de la catégorie $\mathbf{A}-\text{pmod}$ dans elle-même est un foncteur involutif (d'équivalence).

Démonstration. On va définir un morphisme de foncteur θ entre Id et $Du \circ Du$. Soit donc, pour $P \in \mathbf{A}-\text{pmod}$, $\theta_P : P \to \text{HOM}_{\mathbf{A}}(Du(P), \mathbf{A})^{Du}$, qui à

$x \in P$ associe le morphisme de module à gauche non gradué $f \mapsto (Du \circ f)(x)$. On vérifie que θ_P est bien défini et est un morphisme de module à gauche gradué, et que θ est bien un morphisme de foncteur entre Id et $Du \circ Du$.
Soit $x \neq 0$ dans P. P étant projectif, il est en particulier un facteur direct de $\mathbf{A}^n$. L'une des n projections canoniques de $\mathbf{A}^n$ sur $\mathbf{A}$ envoie alors x sur une image non nulle. En composant cette projection avec l'injection de P dans $\mathbf{A}^n$ on obtient un élément $f \in Du(P)$ tel que $f(x) \neq 0$, prouvant l'injectivité de θ_P.
P étant projectif, il existe une décompositon en somme directe dans $\mathbf{A}-$pmod : $\mathbf{A}\{g_1\} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}\{g_n\} = P \oplus P_1$. Par additivité du foncteur et car Du envoit $\mathbf{A}\{g\}$ sur $\mathbf{A}\{-g\}$, on a $L = (Du \circ Du)(L) = (Du \circ Du)(P) \oplus (Du \circ Du)(P_1)$. θ_P et θ_{P_1} étant injectifs, P et P_1 sont inclus dans $(Du \circ Du)(P)$ et $(Du \circ Du)(P_1)$ respectivement. Les espace homogènes des modules de type fini étant de dimension finie (car c'est la cas pour $\mathbf{A}$), $L = P \oplus P_1$ implique que les inclusions ne peuvent être strictes, prouvant que θ_P est surjectif. □

Remarque 4.4.3. On note que la proposition affirme en particulier (en prenant $\psi = id$) l'égalité bien connue entre un espace vectoriel de dimension finie et son bidual. Dans le cas où les espaces vectoriels sont munis d'une structure de $\mathbf{A}$-module, on peut enrichir cette dualité montre la proposition suivante.

Soit M un $\mathbf{A}$-module à gauche (resp. à droite) gradué fini. On a déjà vu que M^* était muni naturellement d'une structre de $\mathbf{A}$-module à droite (à gauche) gradué.

Proposition 4.4.8. Le foncteur $\star$ qui à M associe M^* est un foncteur contravariant additif d'équivalence de la catégorie $\mathbf{A}-$fmod dans fmod$-\mathbf{A}$, la catégorie des $\mathbf{A}$-modules à droite gradués finis (resp. de fmod$-\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}-$fmod). Les deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre.

Démonstration. Le fait que $\star$ soit un foncteur contravariant additif est clair. Pour construire le morphisme θ de foncteur entre $\star \circ \star$ et Id, on utilise l'identification classique entre M et son bidual M^{**}, qui $x \in M$ associe l'évaluation en x. On vérifie que cela définit bien un morphisme de $\mathbf{A}$-module gradué. On sait déjà d'après la proposition et la remarque précédente que θ_M est bijectif, et que θ est un morphisme de foncteur. □

Proposition 4.4.9. Soit M un $\mathbf{A}$-module gradué à droite, le foncteur $M \otimes_{\mathbf{A}} \cdot$ est un foncteur covariant additif, exact à droite, de la catégorie $\mathbf{A}-$Mod dans la catégorie $\mathbb{k}-$Mod des $\mathbb{k}$-modules gradués.

Démonstration. Le fait qu'il s'agisse bien d'un foncteur et qu'il soit additif est immédiat. Quant à l'exactitude à droite on pourra consulter [4], dont on adaptera la démonstration sans problème. □

Voici une application utile de ce résultat :

Lemme 4.4.5. Soit M et N deux $\mathbf{A}$-modules gradués à droite et à gauche respectivement. Supposons de plus que M est de type fini et N fini. Alors $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ est fini.

Démonstration. M est quotient d'un module libre gradué de type fini, qui donne lieu à une suite exacte dont le dernier terme est M. L'exactitude à droite du foncteur tensorisation, son additivité et le fait que $\mathbf{A}\{g\} \otimes_{\mathbf{A}} N = N\{g\}$ montre que $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ est l'image surjective d'une somme directe finie de copies de N (dont les graduations sont éventuellement décalées). Cela prouve en particulier que $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ est fini, N l'étant. □

Remarque 4.4.4. On pourrait démontrer le lemme 3.2.5 de la même manière.

Définition 4.4.2. Un $\mathbf{A}$-module gradué à droite M est dit plat sur $\mathbf{A}$, si le foncteur $M \otimes_{\mathbf{A}} \cdot$ est exact (de façon équivalente exact à gauche).

Proposition 4.4.10. Un $\mathbf{A}$-module gradué à droite P projectif est plat.

Démonstration. D'après la proposition précédente, il suffit de voir que si $i : N \to M$ est une injection entre modules à gauche, alors $id \otimes i : P \otimes_{\mathbf{A}} N \to P \otimes_{\mathbf{A}} M$, que l'on note j est aussi injective. P étant projectif, il existe une décompositon en somme directe dans $\mathbf{A}-\mathrm{Mod}$: $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{A}\{g_\lambda\} = P \oplus P_1$. Par additivité et sachant que $\mathbf{A}\{g\} \otimes_{\mathbf{A}} K \cong K\{g\}$, on a $\bigoplus_\lambda M\{g_\lambda\} \cong (P \otimes_{\mathbf{A}} M) \oplus (P_1 \otimes_{\mathbf{A}} M)$. La même égalité vaut pour N. A travers ces identifications, $id \otimes i$ devient $\bigoplus_\lambda i$ de $\bigoplus_\lambda N\{g_\lambda\}$ dans $\bigoplus_\lambda M\{g_\lambda\}$ (c'est donc une injection) et j n'est autre que sa restriction à $P \otimes_{\mathbf{A}} N$, donc j est injectif. □

Evidemment, la discussion précédente à propos du foncteur tensorisation est encore valable quand on inverse gauche et droite.

4.5 Induction et restriction

Soit $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morphisme (pas forcément unitaire) de $\Bbbk$-algèbres graduées. On note $\varepsilon \in \mathbf{B}$ l'image $\varphi(1)$. Remarquons que ε est un élément idempotent de $\mathbf{B}$.
Soit M un $\mathbf{B}$-module (unitaire) à gauche (resp. à droite) gradué. φ permet de considérer $\varepsilon.M$ (resp. $M.\varepsilon$) comme un $\mathbf{A}$-module à gauche (resp. à droite) gradué. On nomme ce passage pour M de $\mathbf{B}$ à $\mathbf{A}$ restriction.
On considère, par le biais de φ, $\mathbf{B}$ comme un $\mathbf{A}$-module (pas forcément unitaire) à droite gradué. Soit M un $\mathbf{A}$-module (unitaire) à gauche gradué, on peut alors considérer le produit tensoriel $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M$, qui est un $\Bbbk$-module gradué. En voyant $\mathbf{B}$ comme un $\mathbf{B}$-module (unitaire) à gauche gradué, on peut alors considérer ce produit tensoriel comme un $\mathbf{B}$-module (unitaire) à gauche gradué, dont la structure est compatible avec la structure précédente de $\Bbbk$-module gradué (les actions des éléments de $\mathbf{B}$ sont des morphismes de $\Bbbk$-module gradué, ou de façon équivalente, on retrouve la même structure de $\Bbbk$-module gradué en considérant la restriction de $\mathbf{B}$ à $\Bbbk$, associée au morphisme de $\Bbbk$ dans le centre de $\mathbf{B}$). On appelle ce passage pour M de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ induction.

Définition 4.5.1. On note Res (ou $\mathrm{Res}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$ s'il y est nécéssaire de préciser) le foncteur (covariant) additif restriction de $\mathbf{B}-\mathrm{Mod}$ (resp. $\mathbf{B}-\mathrm{fmod}$) dans $\mathbf{A}-\mathrm{Mod}$ (resp. $\mathbf{A}-\mathrm{fmod}$).
On note Ind (ou $\mathrm{Ind}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$ s'il y est nécéssaire de préciser) le foncteur (covariant) additif induction de $\mathbf{A}-\mathrm{Mod}$ (resp. $\mathbf{A}-\mathrm{mod}$) dans $\mathbf{B}-\mathrm{Mod}$ (resp. $\mathbf{B}-\mathrm{mod}$).

Proposition 4.5.1. Le foncteur induction Ind stabilise la catégorie $\mathbf{A}-\mathrm{pmod}$.

Démonstration. Conséquence de l'additivité de Ind et de l'isomorphisme de $\mathbf{B}$-module à gauche gradué

$$\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}\{g\} \cong \mathbf{B}\{g\}.$$

□

Lemme 4.5.1. Le foncteur Ind est isomorphe au foncteur qui à M associe $\mathbf{B}.\varepsilon \otimes_{\mathbf{A}} M = \mathrm{Res}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) \otimes_{\mathbf{A}} M$.

Démonstration. $\mathbf{B}.\varepsilon$ est un sous-$\mathbf{A}$-module gradué de $\mathbf{B}$. En considérant alors l'injection correspondante, que l'on tensorise, on a un morphisme de $\mathbf{B}$-module gradué de $\mathbf{B}.\varepsilon \otimes_{\mathbf{A}} M$ dans $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M$. L'application de $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M$ dans

$\mathbf{B}.\varepsilon \otimes_{\mathbf{A}} M$, qui à $b \otimes x$ associe $b.\varepsilon \otimes x$ est bien définie du fait que $\varepsilon = \varphi(1)$, est $\mathbf{B}$-linéaire et préserve la graduation. On vérifie que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre (toujours car $\varepsilon = \varphi(1)$). L'isomorphisme est naturel au sens où il définit un isomorphisme entre les deux foncteurs. □

Proposition 4.5.2. Supposons que $\varepsilon.\mathbf{B}$, par le biais de φ, soit un $\mathbf{A}$-module à gauche gradué de type fini. Alors Res induit un foncteur de $\mathbf{B}-$mod dans $\mathbf{A}-$mod.

Démonstration. Soit $M \in \mathbf{B}-$mod et $x_1, \ldots, x_n$ une famille génératrice. Soit alors $\varepsilon.x \in \varepsilon.M$, il existe $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbf{B}$ tels que $\varepsilon.x = \sum_k b_k.x_k$. Par idempotence de ε, on a $\varepsilon.x = \sum_k (\varepsilon b_k).x_k$. On conclut sachant que $\varepsilon\mathbf{B}$ est de type fini sur $\mathbf{A}$. □

Proposition 4.5.3. Supposons que $\mathbf{B}.\varepsilon$, par le biais de φ, soit un $\mathbf{A}$-module à droite gradué de type fini. Alors Ind induit un foncteur de $\mathbf{A}-$fmod dans $\mathbf{B}-$fmod.

Démonstration. Soit $M \in \mathbf{B}-$mod et $x_1, \ldots, x_n$ une famille génératrice. Soit alors $\varepsilon.x \in \varepsilon.M$, il existe $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbf{B}$ tels que $\varepsilon.x = \sum_k b_k.x_k$. Par idempotence de ε, on a $\varepsilon.x = \sum_k (\varepsilon b_k).x_k$. On conclut sachant que $\varepsilon\mathbf{B}$ est de type fini sur $\mathbf{A}$. La seconde assertion est conséquence du lemme 4.4.5 et du lemme précédent. □

Lemme 4.5.2. Le foncteur Res, défini entre les catégories où il peut l'être, est exact.

Démonstration. Conséquence du fait qu'une suite de $\mathbf{A}$-modules est exact si et seulement si elle est une suite exacte de $\mathbb{k}$-modules et lemme 4.4.2. □

Proposition 4.5.4. Les foncteurs Ind et Res induisent des morphismes de groupes naturels entre les groupes de Grothendieck G des catégories où ils peuvent être définis.
Le foncteur Res induit un morphisme de groupe naturel entre les groupes de Grothendieck G_0 des catégories où il peut être défini. Il en est de même pour Ind si $\mathbf{B}$ un $\mathbf{A}$-module à gauche gradué plat.

Démonstration. La première assertion est conséquence de la proposition 4.3.1. La seconde conséquence du lemme précédent pour Res, conséquence des propositions 4.3.2 et 4.4.10 pour Ind. □

Lemme 4.5.3. Les foncteurs Ind et Res (considérés dans les catégories où ils peuvent être définis) commutent avec le décalage de graduation :

$$\mathrm{Ind}(M\{g\} \cong \mathrm{Ind}(M)\{g\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}(M\{g\}) \cong \mathrm{Res}(M)\{g\} \ .$$

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 4.5.4. Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ des $\Bbbk$-algèbres graduées, M, M', M'' des modules à gauche gradués respectivement sur $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ et

$$\varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{A} \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}' \to \mathbf{B}, \quad \varphi_{\mathbf{C}} : \mathbf{B} \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}'' \to \mathbf{C}$$

des morphismes (pas forcément unitaires) de $\Bbbk$-algèbre graduée. On note

$$\varphi = \varphi_{\mathbf{C}} \circ (\varphi_{\mathbf{B}} \otimes id_{\mathbf{A}''}) : \mathbf{A} \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}' \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}'' \to \mathbf{C}.$$

On a l'isomorphisme de $\mathbf{C}$-module à gauche gradué :

$$\mathrm{Ind}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{B}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''}\big[\big(\mathrm{Ind}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'}(M \otimes_{\Bbbk} M')\big) \otimes_{\Bbbk} M''\big] \cong \mathrm{Ind}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''}(M \otimes_{\Bbbk} M' \otimes_{\Bbbk} M'').$$

Démonstration. On vérifie que les morphismes de $\mathbf{C}$-module à gauche gradué

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{B}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''} \big[\big(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'} (M \otimes_{\Bbbk} M')\big) \otimes_{\Bbbk} M''\big] & \\ \to \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''} (M \otimes_{\Bbbk} M' \otimes_{\Bbbk} M'') & \\ c \otimes \big[\big(b \otimes (x \otimes x')\big) \otimes x''\big] \mapsto c(b \otimes 1_{\mathbf{A}''}) \otimes (x \otimes x' \otimes x'') & \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''} (M \otimes_{\Bbbk} M' \otimes_{\Bbbk} M'') & \\ \to \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{B}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''} \big[\big(\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'} (M \otimes_{\Bbbk} M')\big) \otimes_{\Bbbk} M''\big] & \\ c \otimes (x \otimes x' \otimes x'') \mapsto c \otimes \big[\big(1_{\mathbf{B}} \otimes (x \otimes x')\big) \otimes x''\big] & \end{aligned}$$

sont bien définis et inverses l'un de l'autre. □

Lemme 4.5.5. Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}$ des $\Bbbk$-algèbres graduées, M, M', M'' des modules à gauche gradués respectivement sur $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ et

$$\psi_{\mathbf{B}'} : \mathbf{A}' \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}'' \to \mathbf{B}', \quad \psi_{\mathbf{C}} : \mathbf{A} \otimes_{\Bbbk} \mathbf{B}' \to \mathbf{C}$$

des morphismes (pas forcément unitaires) de $\Bbbk$-algèbre graduée. On note

$$\psi = \psi_{\mathbf{C}} \circ (id_{\mathbf{A}} \otimes \psi_{\mathbf{B}'}) : \mathbf{A} \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}' \otimes_{\Bbbk} \mathbf{A}'' \to \mathbf{C}.$$

On a l'isomorphisme de $\mathbf{C}$-module à gauche gradué :

$$\mathrm{Ind}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{B}'}\big[M \otimes_{\Bbbk} \big(\mathrm{Ind}^{\mathbf{B}'}_{\mathbf{A}'\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''}(M' \otimes_{\Bbbk} M'')\big)\big] \cong \mathrm{Ind}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''}(M \otimes_{\Bbbk} M' \otimes_{\Bbbk} M'').$$

Démonstration. La preuve est identique à la précédente. □

Lemme 4.5.6. En reprenant les notations et hypothèses des deux précédents lemmes, et en supposant de plus que $\psi_{\mathbf{C}} = \varphi_{\mathbf{C}}$, on obtient la propriété d'associativité suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{B}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''}\big[\big(\mathrm{Ind}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}'}(M \otimes_{\Bbbk} M')\big) \otimes_{\Bbbk} M''\big] \\ \cong \mathrm{Ind}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{A}\otimes_{\Bbbk}\mathbf{B}'}\big[M \otimes_{\Bbbk} \big(\mathrm{Ind}^{\mathbf{B}'}_{\mathbf{A}'\otimes_{\Bbbk}\mathbf{A}''}(M' \otimes_{\Bbbk} M'')\big)\big]\end{aligned}$$

Démonstration. Immédiat. □

Théorème 4.5.1 (*Réciprocité de Frobenius)***.** Les foncteurs *Ind* et *Res* sont auto-adjoints. Plus précisément, Res est l'adjoint à droite de Ind.

Démonstration. A $f\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B\otimes_{\mathbf{A}}M, N)$, on associe le morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, \varepsilon.N)$, qui à $x \in M$ associe $f(1 \otimes x) = f(\varepsilon \otimes x) = \varepsilon f(1 \otimes x)$. A $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, \varepsilon.N)$, on associe le morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B \otimes_{\mathbf{A}} M, N)$, qui à $b \otimes x$ associe $b.g(x)$. On vérifie que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre, et que les isomorphismes qu'elles définissent sont naturels, au sens où ils constituent un isomorphisme de bifoncteur. □

Remarque 4.5.1. On vérifie, de plus, immédiatement, que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\mathrm{Ind}(M), N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, \mathrm{Res}(N))$$

sont des isomorphismes de $\Bbbk$-algèbre graduée.

5 Théorie classique des algèbres de Lie

Dans toute cette partie, $\mathbb{k}$ désignera un corps. Nous allons définir la notion d'algèbre (pas forcément associative et unitaire), que l'on ne confondra pas avec les algèbres utilisées dans les parties précédentes, en particulier on ne parlera pas ici d'algèbre graduée. On suit la présentation donnée dans [9], les résultats seront énoncés sans démonstration.

5.1 Premières définitions

Définition 5.1.1. Une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathfrak{A}$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire, que l'on appelle produit.
Une dérivation δ de $\mathfrak{A}$ est un $\mathbb{k}$-endomorphisme de $\mathfrak{A}$ vérifiant

$$\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y \quad \text{pour tout } x, y \in \mathfrak{A}.$$

Le $\mathbb{k}$-espace vectoriel des dérivations de $\mathfrak{A}$ est noté $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$.

Définition 5.1.2. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel (pas nécéssairement de dimension finie), munie d'une forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

appelée crochet de Lie (ou simplement produit), telle que $[x, x] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et vérifiant l'identité de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{pour tout } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

On dit que x et y dans $\mathfrak{g}$ commutent si leur produit $[x, y]$ est nul. $\mathfrak{g}$ est dite abélienne si son crochet de Lie est nul.

Remarque 5.1.1. Dans le cas ou $\mathbb{k}$ est caractéristique 2, le fait que $[x, x] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ implique que le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ est antisymétrique (ou anticommutatif). Dans les autres cas, c'est équivalent.

On définit de manière naturelle les notions de sous-algèbre de Lie, d'idéal et de quotient (par un idéal) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qui induit sur ces objets des structures d'algèbres de Lie. On définit également la notion de morphisme d'algèbre de Lie, ainsi que la notion de somme directe d'algèbres de Lie, où le crochet est définit composante par composante. On appelle normalisateur d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ la plus grande sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $\mathfrak{h}$ est un idéal. Notons que la catégorie des algèbres de Lie sur un corps $\Bbbk$ est une catégorie abélienne, de même pour sa sous-catégorie additive constituée des algèbres de Lie de dimension finie.

Exemple 5.1.1. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre associative, on peut définir un crochet de Lie en considérant le commutateur

$$[x,y] = xy - yx \quad \text{pour tout } x,y \in \mathfrak{A},$$

qui fait alors de $\mathfrak{A}$ une algèbre de Lie.
Soit V un $\Bbbk$-espace vectoriel, $\mathfrak{gl}(V)$ désigne l'algèbre de Lie des $\Bbbk$-endomorphismes de V, muni du commutateur. On appelle algèbre de Lie linéaire toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, dont les algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(V)$ des endomorphismes de trace nulle, font partie. Dans le cas où V est de dimension finie, l'approche matricielle nous amène également à considérer les algèbres $\mathfrak{gl}_n$ et $\mathfrak{sl}_n$.

Définition 5.1.3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $x \in \mathfrak{g}$. On note $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'application $\Bbbk$-linéaire définie par

$$ad_x(y) = [x,y] \quad \text{pour tout } y \in \mathfrak{g}.$$

Remarque 5.1.2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $x \in \mathfrak{g}$. D'après l'identité de Jacobi, ad_x est une dérivation de $\mathfrak{A}$. Les dérivations de cette forme seront appélées intérieures et constituent un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, les autres seront appelées extérieures.

Définition 5.1.4. Une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbre de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, où V est un $\Bbbk$-espace vectoriel. On dit que V est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module.
On note respectivement $\mathfrak{g}-\mathrm{Mod}$ et $\mathfrak{g}-\mathrm{fmod}$ la catégorie abélienne des $\mathfrak{g}$modules et sa sous-catégorie additive des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie.

On peut, de la même manière que pour les modules sur les algèbres associatives unitaires, énoncer, pour les modules sur les algèbres de Lie, un lemme de Schur, et son corollaire dans le cas d'un corps algébriquement clos.

Remarque 5.1.3. Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ une représentation, elle définit une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ par

$$\varphi(x,y) = \mathrm{Tr}\big(\rho(\mathrm{x})\rho(\mathrm{y})\big)$$

associative, d'après l'identité de Jacobi, dans le sens où

$$\varphi([x,y],z) = \varphi(x,[y,z]) \quad \text{pour tout } x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

Exemple 5.1.2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Les endomorphismes ad_{x} définissent, d'après l'identité de Jacobi, un morphisme d'algèbre de Lie

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}),$$

qu'on appelle la représentation adjointe.

Définition 5.1.5. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle la forme bilinéaire symétrique $K(\cdot,\cdot) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}.\mathrm{ad}.)$ la forme de Killing.

Définition 5.1.6. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Le commutateur de deux parties A et B de $\mathfrak{g}$, que l'on note $[A,B]$ est le sous-espace vectoriel engendré par les produits $[x,y]$, où $x \in A$ et $y \in B$.
Le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'une partie $A \subseteq \mathfrak{g}$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x,y] = 0$ pour tout $y \in A$. Le centre de $\mathfrak{g}$ est le centralisateur de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

Remarque 5.1.4. commutateur de deux idéaux d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est encore un idéal de $\mathfrak{g}$.
Le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'une partie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est, d'après l'identité de Jacobi, une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Toujours d'après l'identité de Jacobi, le centre de $\mathfrak{g}$ est un idéal.

Définition 5.1.7. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle sous-algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ l'idéal $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. On définit par récurrence la suite dérivée d'idéaux de $\mathfrak{g}$ par

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k].$$

On définit par récurrence la suite centrale descendante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ par

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k].$$

Remarque 5.1.5. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On a, pour tout $k \geq 1$ les inclusions $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{g}_k$.

Définition 5.1.8. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite résoluble s'il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}^n = 0$.
Elle est dite nilpotente s'il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}_n = 0$.

Définition 5.1.9. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite simple si elle est non abélienne (donc en particulier ni nulle, ni de dimension nulle) et si elle n'admet que des idéaux triviaux (i.e. 0 et $\mathfrak{g}$).

Exemple 5.1.3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique différente de 2 est simple. Une base de $\mathfrak{sl}_2$ en tant que $\mathbb{k}$-espace vectoriel est donnée par les matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le crochet de Lie est entièrement défini par

$$[X, Y] = H, \ \ [H, X] = 2X, \ \ [H, Y] = -2Y.$$

Proposition 5.1.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Il existe un unique idéal soluble maximal de $\mathfrak{g}$.

Définition 5.1.10. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. On appelle radical de $\mathfrak{g}$ et on note $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ l'unique idéal soluble maximal de $\mathfrak{g}$.
Si $\mathfrak{g}$ est non nulle et de radical nul, elle est dite semisimple.

Remarque 5.1.6. Une algèbre de Lie simple et de dimension finie est semisimple.

Théorème 5.1.1 (*Théorème d'Engel)***.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Si tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont ad-nilpotents (i.e. leur image par ad défiit un $\mathbb{k}$-endomorphisme de $\mathfrak{g}$ nilpotent), alors l'algèbre $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

Ce théorème est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 5.1.2. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, où V est de dimension finie. Si $\mathfrak{g}$ ne contient que des endomorphismes nilpotents et si $V \neq 0$, alors il existe un vecteur propre de valeur propre 0, commun à tous les éléments de $\mathfrak{g}$.

5.2 Algèbres de Lie semisimples de dimension finie

Dans cette section, les algèbres de Lie seront supposées de dimension finie et $\mathbb{k}$ désignera un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos (l'exemple type est $\mathbb{C}$).

Théorème 5.2.1. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, où V est de dimension finie. Si V est non nul, alors il contient un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathfrak{g}$.

Corollaire 5.2.1 (*Théorème de Lie)***.** Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, où V est de dimension finie. Alors $\mathfrak{g}$ stabilises un drapeau de V, i.e. il existe une base de V où les matrices des éléments de $\mathfrak{g}$ sont triangulaires supérieures.

Proposition 5.2.1 (*Décomposition de Dunford ou de Jordan-Chevalley)***.** Soit V un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie et $x \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$, alors

(a) il existe une unique décomposition $x = x_d + x_n$ (appellé la décomposition de Dunford, de Jordan-Chevalley ou de Jordan tout court de x), où x_d est diagonalisable (appellé la partie diagonalisable de x) et x_n nilpotent (appellé la partie diagonalisable de x) et tels que d et n commutent ;

(b) il existe des polynômes $p(T)$ et $q(T)$ dans $\Bbbk[T]$ sans terme constant, tels que $x_d = p(x)$ et $x_n = p(x)$. En particulier x_d et x_n commutent avec tout endomorphisme commutant avec x ;

(c) si $A \subseteq B$ sont des sous-espaces vectoriels de V et si $x(B) \subseteq A$, alors il en est de même pour x_d et x_n.

Lemme 5.2.1. Soit $\mathfrak{A}$ une $\Bbbk$-algèbre. Alors $\mathrm{Der}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{End}_{\Bbbk}(\mathfrak{A})$ contient les parties diagonalisables et nilpotentes de tous ses éléments.

Théorème 5.2.2 (*Critère de Cartan)***.** Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, où V est de dimension finie. Supposons que $\mathrm{Tr}(\mathrm{xy}) = 0$ pour tout $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $y \in \mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g}$ est soluble.

Théorème 5.2.3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (de dimension finie), on a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\mathfrak{g}$ est semisimple,

(ii) $\mathfrak{g}$ est le quotient d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ par son radical $\mathrm{rad}(\mathfrak{h})$,

(iii) $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'autre idéal abélien que 0,

(iv) La forme de Killing K de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée,

(v) $\mathfrak{g}$ est la somme directe s'algèbres de Lie simples.

Si $\mathfrak{g}$ est semisimple et si $\mathfrak{g} = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_r$ est une décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe d'algèbre de Lie simples, tout idéal simple de $\mathfrak{g}$ coïncide avec l'un des L_k. De plus la forme de Killing de L_k est la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

Corollaire 5.2.2. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semisimple, alors $[\mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et tout idéal ou image homomorphique de $\mathfrak{g}$ est encore semisimple. De plus, tout idéal de $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples de $\mathfrak{g}$.

Remarque 5.2.1. Notons que le centre d'une algèbre de Lie semisimple est nul, ou en d'autres mots que la représentation adjointe d'une algèbre de Lie semisimple est fidèle.

Théorème 5.2.4. Si $\mathfrak{g}$ est semisimple, alors $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ (i.e. toutes les dérivations de $\mathfrak{g}$ sont intérieures).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple, d'après la remarque et le théorème précédents, ainsi que le lemme 5.2.1, tout $x \in \mathfrak{g}$ admet une unique décomposition $x = d + n$ telle que $\mathrm{ad_d}$ et $\mathrm{ad_n}$ soit la décomposition de Jordan dans $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{ad_x}$, on vérifie en outre que d et n commutent. On appelle cette décomposition la décomposition de Jordan généralisée et d et n respectivement les parties diagonalisables et nilpotentes de x.

Théorème 5.2.5 (*Théorème de Weyl)***.** Toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semisimple est complètement réductible (dans $\mathfrak{g}-\mathrm{fmod}$).

Théorème 5.2.6. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, où V est de dimension finie. Alors $\mathfrak{g}$ contient les parties diagonalisables et nilpotentes dans $\mathfrak{gl}(V)$ de tous ses éléments. En particulier, les décompostions abstraites et usuelles de Jordan dans $\mathfrak{g}$ coïncident.

Si une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ne contenait que des éléments nilpotents (i.e. tous les éléments de $\mathfrak{g}$ ont une partie diagonalisable nulle), alors d'après le théorème d'Engel 5.1.1, $\mathfrak{g}$ serait nilpotente, ce qui ne peut être le cas d'après le corollaire 5.2.2. Cela prouve que $\mathfrak{g}$ possède des sous-algèbres non nulles constituées uniquement d'éléments diagonalisables (i.e. tous ses éléments ont une partie nilpotente nulle). On appelle un telle sous-algèbre torale.

Lemme 5.2.2. Une sous-algèbre torale d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne.

Soit H une sous-algèbre torale de $\mathfrak{g}$ maximale. D'après le lemme précédent elle est abélienne, ce qui implique que les endomorphismes diagonalisables $\mathrm{ad_x}$, pour $x \in H$, commutent entre eux. Par suite ces endomorphismes sont co-diagonalisables, en d'autres mots l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ admet une décomposition en somme directe constituée des sous-espaces vectoriels

$$\mathfrak{g}_\alpha = \big\{x \in \mathfrak{g} \ / \ [h, x] = \alpha(h)x \text{ pour tout } h \in H\big\},$$

où α parcourt l'espace vectoriel dual $H^\star$. Remarquons que $\mathfrak{g}_0 = C_\mathfrak{g}(H)$, le centralisateur de H dans $\mathfrak{g}$, contenant H d'après le lemme précédent. L'ensemble des formes linéaires $\alpha \neq 0$ pour lesquelles $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ sont appelées les racines (ou les poids) de $\mathfrak{g}$ relativement à H, et on note leur ensemble fini Φ. On a ce qu'on appelle une décomposition en espace de racines (de poids) ou une décomposition de Cartan :

$$\mathfrak{g} = C_\mathfrak{g}(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

5.3 Systèmes de racines

6 Quantification des algèbres de Lie

7 Les algèbres f et leurs formes intégrales ${}_{\mathcal{A}}$f

Cette partie, à partir de la deuxième section, reprend le premier chapitre du livre [19], avec toutefois quelques ajouts qui seront utiles pour la suite.

7.1 Structures tordues

Dans cette section $(G, +)$ désignera un monoïde abélien et $v \in \Bbbk$ un élément inversible. On suppose de plus que G est muni d'une forme bilinéaire, que l'on notera $\cdot$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Une algèbre (associative et unitaire) graduée le sera sur G.

Définition 7.1.1. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-algèbre graduée. Soit x un élément homogène de $\mathbf{A}$ différent de 0, on note $|x|$ l'unique $g \in G$ tel que $x \in \mathbf{A}_g$. On pose par convention $|0| = 0$.

Définition 7.1.2. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux $\Bbbk$-algèbres graduées. On définit le produit tensoriel tordu des algèbres graduées $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ comme étant le $\Bbbk$-module gradué $\mathbf{A} \otimes_{\Bbbk} \mathbf{B}$, qu'on munit du produit bilinéaire associatif (car $\cdot$ est bilinéaire) :

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = v^{|y|\cdot|x'|} xx' \otimes yy' \ ,$$

où x, x', y, y' sont des éléments homogènes. On note cette $\Bbbk$-algèbre graduée $\mathbf{A}\widetilde{\otimes}\mathbf{B}$.

Remarque 7.1.1. On peut alors définir le produit tensoriel tordu de $n \geq 2$ algèbres sans ambiguïté. Cette opération est en effet associative : on vérifie facilement que si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont trois $\Bbbk$-algèbres graduées, les produits des algèbres $(\mathbf{A}\widetilde{\otimes}\mathbf{B})\widetilde{\otimes}\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}\widetilde{\otimes}(\mathbf{B}\widetilde{\otimes}\mathbf{C})$ sont définis tous deux par

$$(x \otimes y \otimes z)(x' \otimes y' \otimes z') = v^{|y|\cdot|x'|+|z|\cdot|y'|+|z|\cdot|x'|} xx' \otimes yy' \otimes zz' \ ,$$

où x, x', y, y', z, z' sont des éléments homogènes.

Lemme 7.1.1. Soient $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_2}$ des $\Bbbk$-algèbres graduées et

$$f_1 : \mathbf{A_1} \to \mathbf{B_1}, \quad f_2 : \mathbf{A_2} \to \mathbf{B_2}$$

deux morphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée. Alors l'application $\Bbbk$-linéaire

$$f_1 \otimes f_2 : \mathbf{A_1}\widetilde{\otimes}\mathbf{B_1} \to \mathbf{A_2}\widetilde{\otimes}\mathbf{B_2}$$

est un morphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée.

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 7.1.2. Soient $\mathbf{A}$ une $\Bbbk$-algèbre graduée et $r : \mathbf{A} \to \mathbf{A}\widetilde{\otimes}\mathbf{A}$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée, alors $(r \otimes id) \circ r$ et $(id \otimes r) \otimes r$ sont des morphismes de $\Bbbk$-algèbre graduée, de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}\widetilde{\otimes}\mathbf{A}\widetilde{\otimes}\mathbf{A}$.

Démonstration. Immédiat. □

Toutes les notions et les résultats présentés dans cette section sont une généralisation du cadre de la simple graduation (prendre $v = 1$ et $\cdot$ nulle), ce dernier étant lui même une généralisation du cadre classique (en prenant $(G, +) = (0)$).

7.2 Donnée de Cartan

Définition 7.2.1. Une donnée de Cartan est une paire $(I, \cdot)$, constituée d'un ensemble I (pas nécessairement fini) et d'une forme bilinéaire $\nu, \nu' \mapsto \nu \cdot \nu'$ définie sur le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[I]$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Cette forme vérifie en outre les axiomes suivants

(a) $i \cdot i \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ pour tout $i \in I$,

(b) $2\frac{i \cdot j}{i \cdot i} \in \{0, -1, -2, \ldots\}$ pour tout $i \neq j$ dans I.

Remarque 7.2.1. Contrairement à ce qui est indiqué dans [19], on permet à I d'être infini.

Définition 7.2.2. Soit v l'indéterminée de $\mathbb{Q}(v)$ et $i \in I$. On note $v_i = v^{i \cdot i/2}$.

(a) pour toute fraction rationnelle $P \in \mathbb{Q}(v)$, on note P_i la fraction rationnelle $P(v_i)$, obtenue en substituant v_i à v,

(b) pour tout $\nu = \sum_i \nu_i i \in \mathbb{Z}[I]$, on écrit $v_\nu = \prod_i {v_i}^{\nu_i}$ (si $\nu = i$, alors v_ν est le v_i défini précédemment),

(c) $|\nu| = \sum_i \nu_i \in \mathbb{Z}$ quand $\nu = \sum_i \nu_i i \in \mathbb{Z}[I]$.

7.3 Les algèbres $'\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}$

Définition 7.3.1. On note $'\mathbf{f}$ la $\mathbb{Q}(v)$-algèbre associative unitaire libre engendrée par les générateurs θ_i $(i \in I)$.

Définition 7.3.2. Soit $\mathbb{N}[I]$ le sous-monoïde de $\mathbb{Z}[I]$ constitué des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$. On note $\mathrm{Seq}(\nu)$ l'ensemble des séquences $\boldsymbol{i} = i_1 \dots i_m$, telles que $i_k \in I$ pour chaque k et telles que i apparaît ν_i fois dans la séquence (la longueur m de la séquence est alors égale à $|\nu|$).

Exemple 7.3.1. Soient $i \neq j$, alors $\mathrm{Seq}(2i + j) = \{iij, iji, jii\}$.

Définition 7.3.3. On note $'\mathbf{f}_\nu$ le $\mathbb{Q}(v)$-sous espace vectoriel (de dimension finie) engendré par les monômes $\theta_{\boldsymbol{i}} = \theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_m}$, où $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$.

Lemme 7.3.1. On a $'\mathbf{f} = \bigoplus_\nu {}'\mathbf{f}_\nu$ et cette décomposition fait de $'\mathbf{f}$ une $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée sur $(\mathbb{N}[I], +)$.

Démonstration. Immédiat. $\square$

Définition 7.3.4. On note $r : {}'\mathbf{f} \to {}'\mathbf{f}\widetilde{\otimes}{}'\mathbf{f}$ l'unique morphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée qui envoie, pour tout $i \in I$, θ_i sur $\theta_i \otimes 1 + 1 \otimes \theta_i$.
On note $\varepsilon : {}'\mathbf{f} \to \Bbbk$ l'unique morphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée qui envoie, pour tout $i \in I$, θ_i sur 0 (et 1 sur 1).

Remarque 7.3.1. D'après le lemme 7.1.2, $(r \otimes id) \circ r$ et $(id \otimes r) \otimes r$ sont des morphismes de $\Bbbk$-algèbre graduée, de $'\mathbf{f}$ dans $'\mathbf{f}\widetilde{\otimes}{}'\mathbf{f}\widetilde{\otimes}{}'\mathbf{f}$.

Lemme 7.3.2. On a la propriété de coassociativité :

$$(r \otimes id) \circ r = (id \otimes r) \otimes r.$$

Démonstration. On vérifie que les morphismes envoient θ_i, pout tout $i \in I$, sur la même image $\theta_i \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \theta_i \otimes \theta_i + 1 \otimes 1 \otimes \theta_i$. $\square$

Lemme 7.3.3. On a la propriété de counité :

$$(\varepsilon \otimes id) \circ r = (id \otimes \varepsilon) \circ r = id : {}'\mathbf{f} \to {}'\mathbf{f}.$$

Démonstration. On le vérifie de nouveau sur les θ_i. $\square$

Corollaire 7.3.1. r et ε font de $'\mathbf{f}$ une $\mathbb{Q}(v)$-bialgèbre graduée tordue.

Démonstration. Immédiat. $\square$

Proposition 7.3.1. Il existe une unique forme $\mathbb{Q}(v)$-bilinéaire $(\cdot, \cdot)$ sur $'\mathbf{f}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) $(1,1) = 1$,
(b) $(\theta_i, \theta_j) = \delta_{i,j}(1 - v_i^{-2})^{-1}$,
(c) $(x, y'y'') = (r(x), y' \otimes y'')$ pour tout $x, y', y'' \in {}'\mathbf{f}$,
(d) $(xx', y'') = (x \otimes x', r(y''))$ pour tout $x, x', y'' \in {}'\mathbf{f}$,
où on note encore par $(\cdot,\cdot)$ la forme $\mathbb{Q}(v)$-bilinéaire sur ${}'\mathbf{f}\widetilde{\otimes}{}'\mathbf{f}$, définie par

$$(x_1 \otimes x_2, x_1' \otimes x_2') \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_1')(x_2, x_2').$$

La forme $(\cdot,\cdot)$ sur ${}'\mathbf{f}$ est symétrique et vérifie

$$(x, y) = 0 \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont homogènes et tels que } |x| \neq |y|. \tag{7.1}$$

Démonstration. Voir [19, chapitre 1, proposition 1.2.3]. □

Définition 7.3.5. On note $\mathcal{I}$ le radical de la forme $(\cdot,\cdot)$, i.e. l'ensemble des éléments $x \in {}'\mathbf{f}$ orthogonaux à ${}'\mathbf{f}$ tout entier : $(x, y) = 0$ pour tout $y \in {}'\mathbf{f}$.

Lemme 7.3.4. $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère homogène de ${}'\mathbf{f}$.

Démonstration. Voir [19, chapitre 1, paragraphe 1.2.4]. L'homogénité est conséquence de 7.1. □

Définition 7.3.6. On note $\mathbf{f} = {}'\mathbf{f}/\mathcal{I}$ la $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée, quotient de $\mathbf{f}$ par le radical $\mathcal{I}$. La forme $\mathbb{Q}(v)$-bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ induit sur $\mathbf{f}$ une forme $\mathbb{Q}(v)$-bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ symétrique non dégénérée, que l'on note encore $(\cdot,\cdot)$. θ_i désignera l'image de $\theta_i \in {}'\mathbf{f}$ dans $\mathbf{f}$, pour tout $i \in I$.

Remarque 7.3.2. Les espaces homogènes de $\mathbf{f}_\nu$ sont de dimension finie, ceci étant le cas pour les espaces ${}'\mathbf{f}_\nu$.

Lemme 7.3.5. On a $r(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}\widetilde{\otimes}{}'\mathbf{f} + {}'\mathbf{f}\widetilde{\otimes}\mathcal{I}$.

Démonstration. Voir [19, chapitre 1, paragraphe 1.2.6]. □

Définition 7.3.7. r induit un morphisme de $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée de $\mathbf{f}$ dans $\mathbf{f}\widetilde{\otimes}\mathbf{f}$, que l'on note encore r.

Remarque 7.3.3. En dessinant un diagramme commutatif et par surjectivité de la projection ${}'\mathbf{f} \to \mathbf{f}$, on voit que la propriété de coassociativité continue d'être vraie pour ce nouveau r.

Lemme 7.3.6. Soit $x \in \mathcal{I}$, alors la projection de x sur $'\mathbf{f}_0$ est nulle.

Démonstration. Conséquence des propriété (a) et 7.1. □

Définition 7.3.8. ε induit un morphisme de $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée de $\mathbf{f}$ dans $\mathbb{Q}(v)$, que l'on note encore ε.

Remarque 7.3.4. En dessinant un diagramme commutatif et par surjectivité de la projection $'\mathbf{f} \to \mathbf{f}$, on voit que la propriété de counité continue d'être vraie pour ce nouveau ε.

Corollaire 7.3.2. r et ε font de $\mathbf{f}$ une $\mathbb{Q}(v)$-bialgèbre graduée tordue. La projection de $'\mathbf{f}$ dans $\mathbf{f}$ est un morphisme de $\mathbb{Q}(v)$-bialgèbre graduée tordue.

Démonstration. Immédiat. □

Définition 7.3.9. On note $^- : \mathbb{Q}(v) \to \mathbb{Q}(v)$ l'unique involution de $\mathbb{Q}$-algèbre qui envoie v sur v^{-1}. Soient E et F deux $Q(v)$-espaces vectoriels gradués (sur $(G, +)$ quelconque ici), on dit que $f : E \to F$ est une application $\mathbb{Q}(v)$-antilinéaire préservant la graduation si f est une application $\mathbb{Q}(v)$-linéaire préservant la graduation, quand on considère F avec la structure d'espace vectoriel graduée induite par $^-$ (ou de façon équivalente quand on considère E avec cette nouvelle structure). On définit de la même façon un morphisme antilinéaire de $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée.

Définition 7.3.10. On note $^- : {'\mathbf{f}} \to {'\mathbf{f}}$ l'unique involution antilinéaire de $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée qui à θ_i associe θ_i, pour tout $i \in I$.

Lemme 7.3.7. $^-$ envoie $\mathcal{I}$ dans lui-même.

Démonstration. Voir [19, chapitre 1, paragraphes 1.2.10, 1.2.11 et 1.2.12]. □

Définition 7.3.11. L'involution $^- : {'\mathbf{f}} \to {'\mathbf{f}}$ induit une involution antilinéaire de $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée de $\mathbf{f}$ dans $\mathbf{f}$, que l'on note encore $^-$.

7.4 Les relations quantiques de Serre

Définition 7.4.1. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $i \in I$, on note $\theta_i^{(p)}$ (dans $'\mathbf{f}$ ou $\mathbf{f}$) l'élément $\theta_i^p/[p]^!_i$ si $p \geq 0$, l'élément 0 sinon.

Lemme 7.4.1. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$r(\theta_i^{(p)}) = \sum_{t+t'=p} v_i^{tt'} \theta_i^{(t)} \otimes \theta_i^{(t')}.$$

Démonstration. Voir [19, chapitre 1, lemme 1.4.2]. □

Proposition 7.4.1. Les générateurs θ_i de $\mathbf{f}$ satisfont les identités

$$\sum_{p+p'=1-2\frac{i\cdot j}{i\cdot i}} (-1)^{p'} \theta_i^{(p)} \theta_j \theta_i^{(p')} = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j \text{ dans } I.$$

Démonstration. Voir [19, chapitre 1, section 1.4]. □

Lemme 7.4.2. Pour tout $p \geq 0$, on a

$$(\theta_i^{(p)}, \theta_i^{(p)}) = \prod_{s=1}^{p} (1 - v_i^{-2s})^{-1} = v_i^{p(p+1)/2} (v_i - v_i^{-1})^{-p} ([p]_i^!)^{-1}.$$

Démonstration. Voir [19, chapitre 1, lemme 1.4.4]. □

Remarque 7.4.1. On appelle les identitités ci-dessus les relations quantiques de Serre.

7.5 L'algèbre ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$

Définition 7.5.1. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.

Définition 7.5.2. On note ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ la sous-$\mathcal{A}$-algèbre de $\mathbf{f}$ engendrée par les éléments $\theta_i^{(s)}$, où i parcourt I et s parcourt $\mathbb{Z}$.

Remarque 7.5.1. Puisque les $\theta_i^{(s)}$ sont homogènes, ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ possède de façon naturelle une structure de $\mathcal{A}$-algèbre graduée. On note ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}_\nu$ ses espaces homogènes (qui sont des $\mathcal{A}$-modules).

Définition 7.5.3. On note ${}_{\mathbb{Q}(v)}\widetilde{\mathbf{f}}$ le quotient de ${}_{\mathbb{Q}(v)}{}'\mathbf{f}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$\Phi_{i,j} = \sum_{p+p'=1-2\frac{i\cdot j}{i\cdot i}} (-1)^{p'} \theta_i^{(p)} \theta_j \theta_i^{(p')} ,$$

où $i \neq j$ parcourent I et $p, p' \geq 0$.

Remarque 7.5.2. Les $\Phi_{i,j}$ étant homogènes, $_{\mathbb{Q}(v)}\widetilde{\mathbf{f}}$ est une $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée, dont on note les espaces homogènes $_{\mathbb{Q}(v)}\widetilde{\mathbf{f}}_\nu$ (qui sont des $\mathbb{Q}(v)$-espaces vectoriels de dimension finie).

Théorème 7.5.1. Le morphisme de $\mathbb{Q}(v)$-algèbre graduée naturel (d'après les relations quantiques de Serre : voir 7.4.1) $_{\mathbb{Q}(v)}\widetilde{\mathbf{f}} \to \mathbf{f}$ est un isomorphisme.

Démonstration. Voir [19, chapitre 33, théorème 33.1.3]. □

Lemme 7.5.1. Le morphisme naturel de $\mathcal{A}$-algèbre graduée

$$_{\mathcal{A}}\mathbf{f}\ \widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}}\ _{\mathcal{A}}\mathbf{f} \to \mathbf{f}\ \widetilde{\otimes}_{\mathbb{Q}(v)}\ \mathbf{f}$$

est injectif. Plus généralement, le résultat reste vrai pour $n \geq 2$ tensorisations tordues.

Démonstration. Admis. □

Lemme 7.5.2. $r : \mathbf{f} \to \mathbf{f}$ et $\varepsilon : \mathbf{f} \to \mathbb{Q}(v)$ induisent des morphismes de $\mathcal{A}$-algèbres graduées, que l'on note encore r et ε.

Démonstration. Le lemme précédent ainsi que le lemme 7.4.1 donnent le résultat pour r. Quant à ε, on vérifie que les générateurs $\theta_i^{(s)}$ sont envoyés dans $\mathcal{A}$ par ε □

Lemme 7.5.3. r et ε font de $_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ une $\mathcal{A}$-bialgèbre graduée tordue.

Démonstration. Les propriétés de coassociativité et de counité se démontrent en dessinant des diagrammes commutatifs, en utilisant le lemme 7.5.1 avec $n = 3$ et le fait que $_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ s'injecte dans $\mathbf{f}$. □

Lemme 7.5.4. La forme $Q(v)$-bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathbf{f}$ induit une forme $\mathcal{A}$-bilinéaire sur $_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$.

Démonstration. Conséquence du lemme 7.4.2 et de la propriété 7.1. □

8 Groupe symétrique et algèbres de nilHecke

8.1 Le groupe symétrique

Nous allons donner ici quelques résultats utiles sur le groupe symétrique, ainsi qu'une présentation de celui-ci par générateurs et relations.
Soit $m \in \mathbb{N}$ non nul, on note S_m le groupe symétrique.

Définition 8.1.1. Soit $\omega \in S_m$. $\mathrm{I}(\omega)$ désigne l'ensemble des inversions de ω, i.e. l'ensemble des couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq m$ et $\omega(i) > \omega(j)$. On note $\mathrm{l}(\omega)$ et on appelle longueur le nombre d'inversions, i.e. le cardinal $|\mathrm{I}(\omega)|$.

Lemme 8.1.1. Soit u et v deux permutations de S_m, alors $\mathrm{l(vu)} \leq \mathrm{l(u)}+\mathrm{l(v)}$.

Démonstration. u induit une bijection naturelle de $U = \{(i, j) \;/\; 1 \leq i < j \leq m\}$, que l'on note encore u. On note $\mathrm{I}_1 = \mathrm{u}^{-1}\big(\mathrm{U} - \mathrm{I(v)}\big) \cap \mathrm{I(u)}$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{u}^{-1}\big(\mathrm{I(v)}\big) \cap \big(\mathrm{U} - \mathrm{I(u)}\big)$. On vérifie alors que $\mathrm{I(vu)} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$. Or $|\mathrm{I}_1| \leq |\mathrm{I(u)}|$ et $|\mathrm{I}_2| \leq |\mathrm{I(v)}|$ car u est injective sur U, ce qui démontre la proposition. $\square$

Remarque 8.1.1. On peut préciser le lemme (en reprenant la preuve) : $\mathrm{l(vu)} - \mathrm{l(u)} - \mathrm{l(v)}$ est un entier positif pair.

Pour $1 \leq i \leq m-1$, soit s_i la transposition $(i\ i{+}1)$. Ces permutations sont de longueur 1.

Lemme 8.1.2. Soit ω une permutation de S_m et $1 \leq i \leq m-1$. Alors la multiplication à gauche de ω (respectivement à droite) par s_i augmente ou diminue de 1 la longueur de ω.

Démonstration. Reprendre la preuve du lemme précédent. $\square$

On peut remarquer deux choses. La seule permutation de longueur nulle est l'identité. En effet, soit ω une telle permutation, alors $\omega(1) < \omega(2) < \cdots < \omega(m)$. De même on vérifie que la permutation ω_0, définie par $\omega_0(i) = \omega_0(m-i+1)$, pour $1 \leq i \leq m$, est l'unique permutation de longueur maximale $\frac{m(m-1)}{2}$.

Il est connu que les transpositions s_i engendrent le groupe symétrique. Ainsi toute permutation de S_m s'écrit comme un produit d'éléments de la famille $(s_i)_{1 \leq i \leq m-1}$, étant donné que s_i est son propre inverse. Si ω est une permutation de longueur r, alors elle ne peut s'écrire que comme le produit d'au minimum r transpositions s_i d'après le lemme 8.1.2.

Définition 8.1.2. La décomposition (ou présentation) $\omega = s_{a_1} \dots s_{a_r}$ sera dite réduite (ou minimale) si ω est de longueur r.

Remarque 8.1.2. L'unique décomposition réduite de l'identité est la décomposition vide.

Voici un exemple utile :

Lemme 8.1.3. $[s_1][s_2 s_1] \cdots [s_{m-2} \cdots s_2 s_1][s_{m-1} \cdots s_2 s_1]$ est une présentation minimale de ω_0.

Démonstration. Le nombre de transpositions convient et on vérifie l'égalité des deux permutations par leur action sur l'ensemble $\{1, \dots, m\}$. □

Remarque 8.1.3. Puisque ω_0^{-1} inverse tous les couples (i, j), où $i < j$, ω_0 est son propre inverse. Ainsi $[s_1 s_2 \cdots s_{m-1}][s_1 s_2 \cdots s_{m-2}] \cdots [s_1 s_2][s_1]$ est une autre présentation minimale de ω_0.

Il peut donc exister plusieurs décompositions réduites pour une même permutation, la proposition suivante montre qu'il en existe au moins une.

Proposition 8.1.1. Soit $0 \leq r \leq \frac{m(m-1)}{2}$, et ω une permutation de longueur r. Alors ω peut s'écrire comme le produit de r transpositions s_i.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur r.

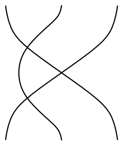
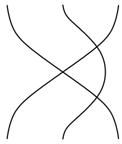
1. Pour $r = 0$, le mot vide convient.
2. Supposons maintenant que l'existence soit vérifiée pour $r \geq 0$ et soit ω de longueur $r + 1$. Alors il existe $1 \leq i \leq m - 1$ tel que $(i, i + 1) \in \mathrm{I}(\omega)$. En effet dans le cas contraire, on aurait $\omega(1) < \omega(2) < \cdots < \omega(m)$, donc ω serait l'identité, qui est de longueur nulle donc différente de $r + 1$. On vérifie que $l(\omega s_i) = l(\omega) - 1$ et on applique alors l'hypothèse de récurrence pour conclure.

□

Les transpositions s_i de S_m vérifient les relations suivante :

$$\begin{array}{rcl} s_i^2 & = & 1 \\ s_i s_j & = & s_j s_i \quad \text{si } |j - i| > 1 \\ s_i s_{i+1} s_i & = & s_{i+1} s_i s_{i+1}. \end{array} \tag{8.1}$$

Les relations de la deuxième ligne s'appellent les relations de commutation, celles de la dernière ligne les relations de tresse. Cette dénomination vient du fait que les deux diagrammes


et


sur lesquels on peut lire la permutation (les brins sur les côtés ne sont pas dessinés) sont la projection sur le plan horizontal d'un même diagramme tridimensionnel (une tresse).
Notons que si l'on supprime la première relation, on obtient ce que l'on appelle le groupe des tresses.

Définition 8.1.3. Soit ω une permutation dans S_m. On définit $\mathcal{G}(\omega)$ le graphe non orienté dont les sommets sont les décompositions réduites de ω, que l'on voit comme des mots sur l'alphabet $\{s_1, \ldots, s_{m-1}\}$. Deux sommets x et y sont reliés s'il existe une suite finie de mots $x_0, \ldots, x_p$ (où $p \in \mathbb{N}$), avec $x_0 = x$ et $x_p = y$, tels que pour $k \in \{0, \ldots, p-1\}$, x_{k+1} s'obtient à partir de x_k, en remplaçant dans ce dernier, soit $s_i s_{i+1} s_i$ par $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ (pour $1 \leq i \leq m-2$), soit $s_{i+1} s_i s_{i+1}$ par $s_i s_{i+1} s_i$, soit $s_i s_j$ par $s_j s_i$ (pour $|j-i| > 1$).

Remarque 8.1.4. On note que tous les mots x_k intervenant dans la définition des arrêtes sont des mots réduits (i.e. définissent des décompositions réduites) de ω, car ils sont de longueur $r = \mathrm{l}(\omega)$.

Lemme 8.1.4. L'ensemble des inversions de la permutation $\omega = s_{a_1} \cdots s_{a_r}$, de longueur r, est le suivant

$$\mathrm{I}(\omega) = \left\{ \omega_{\mathrm{h}} \left(\mathrm{i_h}, \mathrm{i_{h+1}} \right) \ , \ 1 \leq \mathrm{h} \leq \mathrm{r} \right\} \tag{8.2}$$

où $\omega_h = s_{a_r} \cdots s_{a_{h+1}}$.

Démonstration. La preuve est celle de [20, chapitre 2, lemme 2.1.4].
On vérifie que si u est une permutation, et i un entier tel que $\mathrm{l}(\mathrm{us_i}) = \mathrm{l}(\mathrm{u}) + 1$, alors

$$\mathrm{I}(\mathrm{us_i}) = \mathrm{s_i}\big(\mathrm{I}(\mathrm{u})\big) \cup \{(\mathrm{i}, \mathrm{i}+1)\},$$

et l'on conclut par récurrence. □

Corollaire 8.1.1. Soit $s_{a_1} \cdots s_{a_r}$ une présentation minimale d'une permutation ω, alors si le couple (i, j), où $i < j$, n'est pas inversé par ω,

$$a_h \neq s_{a_{h+1}} \cdots s_{a_r}(i) \quad \text{quand} \quad s_{a_{h+1}} \cdots s_{a_r}(j) = a_h + 1.$$

Démonstration. Immédiat. □

Lemme 8.1.5. *Lemme de l'échange*
Soit ω une permutation dans S_m. Si $s_{a_1} \ldots s_{a_r}$ et $s_{b_1} \ldots s_{b_r}$ sont deux mots décompositions réduites de ω, alors il existe $1 \leq k \leq r$ tel que

$$\omega = s_{b_1} s_{a_1} s_{a_2} \cdots \widehat{s_{a_k}} \cdots s_{b_r} \tag{8.3}$$

où le chapeau sur s_{a_k} signifie que cette transposition n'apparaît pas.

Démonstration. La preuve est celle de [20, chapitre 2, lemme 2.1.7].
D'après la description, donnée par le lemme précédent, de $\mathrm{I}(\omega^{-1})$ en fonction d'une présentation minimale, il existe un entier k tel que

$$(b_1, b_1+1) = s_{a_1} \cdots s_{a_{k-1}} (a_k, a_k+1).$$

D'où $s_{b_1} s_{a_1} s_{a_2} \cdots s_{a_{k-1}} = s_{a_1} s_{a_2} \cdots s_{a_{k-1}} s_{a_k}$, ce qui implique le résultat. □

Proposition 8.1.2. Pour toute permutation $\omega \in S_m$, le graphe $\mathcal{G}(\omega)$ des présentations minimales est connexe.

Démonstration. La preuve est celle de [20, chapitre 2, proposition 2.1.6].
Montrons le résultat par récurrence sur r.

1. Pour $r = 0$, il existe une seule décomposition réduite de l'identité.
2. Supposons le résultat démontré pour $r \in \mathbb{N}$ et soit $\omega = s_{a_1} s_{a_2} \cdots s_{a_{r+1}}$ et $\omega = s_{b_1} s_{b_2} \cdots s_{b_{r+1}}$ deux présentations minimales de ω. Soit k l'entier donné par le lemme de l'échange. Supposons $k \leq r$ pour commencer. Par hypothèse de récurrence, $s_{b_1} s_{a_1} s_{a_2} \cdots \widehat{s_{a_k}} \cdots s_{a_r}$ se déduit, en opérant sur les r premiers termes uniquement et en utilisant seulement les relations de tresse et de commutation, de $s_{a_1} s_{a_2} \cdots s_{a_r}$ (d'après le lemme 8.1.2, les mots $s_{a_1} s_{a_2} \cdots s_{a_r}$ et s_{b_1} !$s_{a_1} s_{a_2} \cdots \widehat{s_{a_k}} \cdots s_{a_r}$ restent réduits). $s_{b_1} s_{b_2} \cdots s_{b_{r+1}}$ se déduit ensuite de la même façon de $s_{b_1} s_{a_1} s_{a_2} \cdots \widehat{s_{a_k}} \cdots s_{a_{r+1}}$ en opérant cette fois-ci sur les r derniers.
   Supposons à présent $k = r+1$. Premier cas : a_1 et b_1 ne sont pas consécutifs, donc s_{a_1} et s_{b_1} commutent. On peut alors passer de $s_{a_1} s_{a_2} \cdots s_{a_{r+1}}$ à

$s_{a_1}s_{b_1}sa_2\cdots s_{a_r}$ en opérant sur les r derniers termes et en utilisant seulement les relations de tresse et de commutation, puis à $s_{b_1}s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_r}$ en faisant commuter les deux premiers, et l'on conclut comme précédemment. Second cas : a_1 et b_1 sont consécutifs. On applique à nouveau le lemme de l'échange à $s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_{r+1}}$ et $s_{b_1}s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_r}$, qui fournit une nouveeau mot réduit $s_{a_1}s_{b_1}!s_{a_2}\cdots\widehat{s_{a_h}}\cdots s_{a_r}$. On passe alors de $s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_{r+1}}$ à $s_{a_1}s_{b_1}s_{a_1}s_{a_2}\cdots\widehat{s_{a_h}}\cdots s_{a_r}$ en opérant sur les r derniers termes, puis de ce dernier à $s_{b_1}s_{a_1}!s_{b_1}\cdots\widehat{s_{a_h}}\cdots s_{a_r}$ via les relations de tresses, et l'on conlut comme précédemment.

□

On peut à présent donner une présentation du groupe symétrique S_m.

Théorème 8.1.1. Le groupe symétrique S_m est isomorphe au groupe engendré par les $m-1$ éléments $s_1,\ldots,s_{m-1}$, et vérifant les relations :

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 \\ s_is_j &= s_js_i \quad \text{si } |j-i|>1 \\ s_is_{i+1}s_i &= s_{i+1}s_is_{i+1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\omega\in S_m$, on va montrer que si x et y sont deux mots (pas forcément réduits) définissant ω, alors on peut passer de l'un à l'autre en utilisant seulement les relations de l'énoncé.
Pour cela, d'après la connexité de $\mathcal{G}(\omega)$, il suffit de prouver que si $s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_p}$ est un mot définissant ω, alors on peut obtenir, à partir de ce dernier, un mot réduit de ω en utilisant seulement les relations de l'énoncé. Soit k tel que la décomposition $u=s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_k}$ soit réduite, tandis que la décomposition $v=us_{a_{k+1}}$ ne l'est pas. Alors d'après le lemme 8.1.2, l(v) = k − 1. D'après la proposition 8.1.1, v s'écrit comme le produit de $k-1$ transpositions $s_{b_1}s_{b_2}\cdots s_{b_{k-1}}$. On a alors $u=s_{b_1}s_{b_2}\cdots s_{b_{k-1}}s_{a_{k+1}}$. Par connexité de $\mathcal{G}(\omega)$, on peut passer de $s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_p}$ à $s_{b_1}s_{b_2}\cdots s_{b_{k-1}}s_{a_{k+1}}s_{a_{k+1}}\cdots s_{a_p}$ en utilisant seulement les relations de tresse et de commutation, puis à $s_{b_1}s_{b_2}\cdots s_{b_{k-2}}s_{a_{k+2}}\cdots s_{a_p}$ en utilisant la relation d'idempotence. On conclut par récurrence. □

Il existe d'autres preuves de la présentation de S_m (voir par exemple [15, début du chapitre 4]). Toutefois celle présentée ici fait intervenir la notion de longueur d'une permutation et quelques-uns des résultats qui lui sont liés, utiles pour la suite.

8.2 Les sous-groupes de Young

Pour cette section, les résultats sont donnés sans démonstration et l'on pourra consulter [7, section 1] pour plus de détail.

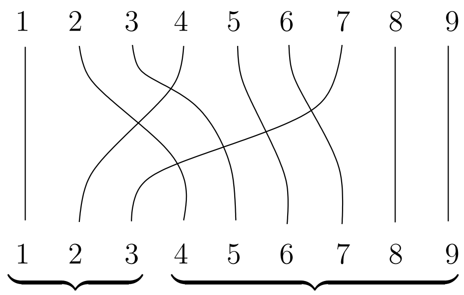
Définition 8.2.1. Une composition μ de m est une suite finie $(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_r)$ d'entiers strictement positifs tels que $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = m$.

Définition 8.2.2. Le sous-groupe de Young associé à une composition μ de m est le sous-groupe $S_{\mu_1} \times S_{\mu_2} \times \cdots \times S_{\mu_r}$ de S_m. On note ce sous-groupe S_μ.

Lemme 8.2.1. Soit μ une composition de m. Dans chaque classe à gauche ωS_μ de S_m modulo S_μ, il existe une unique permutation de longueur minimale.

Définition 8.2.3. Soit μ une composition de m. On appelle battages les représentants de longueur minimale des classes à gauche de S_m module S_μ. On note D_μ ou encore $D(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ l'ensemble des battages.

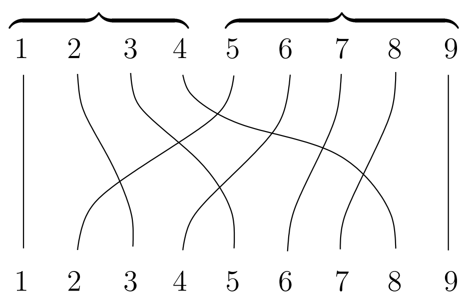
Exemple 8.2.1. Voici le diagramme d'un élément de $D(3, 6)$:



La permutation correspondante envoie chaque entier écrit en bas sur l'entier écrit en haut, relié par le brin associé.

Lemme 8.2.2. Soit μ une composition de m. D_μ^{-1} est l'ensemble des représentants de longueur minimale des classes à droite de S_m module S_μ.

Exemple 8.2.2. Voici le diagramme d'un élément de $D^{-1}(4, 5)$:



Lemme 8.2.3. Soient μ et μ' deux compositions de m. $D_{\mu,\mu'} \overset{\text{def}}{=} D_{\mu}^{-1} \cap D_{\mu'}$ est l'ensemble des représentants des biclasses $S_\mu \omega S_{\mu'}$ de S_m modulo $S_\mu - S_{\mu'}$. Pour chaque $d \in D_{\mu,\mu'}$, on a de plus les propriétés suivantes :

(1) $S_\mu \cap dS_{\mu'}d^{-1}$ et $d^{-1}S_\mu d \cap S_{\mu'}$ sont des sous-groupes de Young de S_m, on notera $\mu \cap d\mu'$ et $d^{-1}\mu \cap \mu'$ les compositions de m respectives correspondantes,

(2) l'application $\omega \mapsto d^{-1}\omega d$ induit un isomorphisme de groupe preservant les longueurs, de $S_{\mu\cap d\mu'}$ dans $S_{d^{-1}\mu\cap\mu'}$,

(3) chaque $\omega \in S_\mu d S_{\mu'}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\omega = udu'$, où $u \in S_\mu$ et $u' \in S_{\mu'} \cap D^{-1}_{d^{-1}\mu\cap\mu'}$, on a de plus $\mathrm{l}(\omega) = \mathrm{l(u)} + \mathrm{l(d)} + \mathrm{l(u')}$ et $S_{\mu'} \cap D^{-1}_{d^{-1}\mu\cap\mu'}$ est l'ensembles des représentants de longueur minimale des classes à droite de $S_{\mu'}$ modulo $S_{d^{-1}\mu\cap\mu'}$.

8.3 Les algèbre de nilHecke

Dans cette partie $\Bbbk$ désignera $\mathbb{Z}$ ou un corps.

Définition 8.3.1. Soit $m \geq 1$. L'algèbre de nilHecke NH_m est la $\Bbbk$-algèbre engendrée par les éléments $x_1, \ldots, x_m$ et $s_1, \ldots, s_{m-1}$ et définie par les relations de nilCoxeter

$$\begin{array}{rcl} s_a^2 &=& 0 \\ s_a s_b &=& s_b s_a \quad \text{si } |a-b| > 1 \\ s_a s_{a+1} s_a &=& s_{a+1} s_a s_{a+1} \ , \end{array} \tag{8.4}$$

les relations

$$x_a x_b = x_b x_a \ , \tag{8.5}$$

et les relations

$$\begin{array}{rcl} s_a x_b &=& x_b s_a \quad \text{si } b \neq a, a+1 \\ s_a x_a &=& x_{a+1} s_a + 1 \\ s_a x_{a+1} &=& x_a s_a - 1. \end{array} \tag{8.6}$$

Par convention, on pose $NH_0 = \Bbbk$.
Il existe d'autres définitions sensiblement différentes pour les algèbres de nilHecke, on peut par exemple demander $s_a^2 = 1$ dans les relations de nilCoxeter qui sont alors celles du l'algèbre du groupe symétrique.

Remarque 8.3.1. Les relations 8.5 permettent de voir que l'on a un morphisme d'algèbre de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_m]$ dans NH_m. On peut donc parler du polynôme f dans NH_m. On verra que le morphisme est en fait injectif.

Remarque 8.3.2. La symétrie des relations définissant NH_m permet de definir une anti-involution ψ (unitaire) de $\Bbbk$-algèbre graduée par $\psi(x_a) = x_a$ et $\psi(s_a) = s_a$.

Proposition 8.3.1. $\Bbbk[x_1, \dots, x_m]$ est muni d'une structure de NH_m-module en faisait agir x_j par multiplication par x_j et s_a comme l'opérateur de différence divisée :

$$\partial_a(f(x)) = \frac{f(x) - s_a f(x)}{x_a - x_{a+1}}.$$

$\Bbbk[x_1, \dots, x_m]$ est un module indécomposable.

Démonstration. Il faut vérifier que les opérateurs de multiplication et les opérateurs de différence divisée vérifient les relations définissant NH_m. Exceptée la dernière relation de nilCoxeter, les autres se vérifient immédiatement :

$$\begin{aligned}\partial_a\partial_{a+1}\partial_a(f) = {} & \frac{1}{x_a - x_{a+1}} \\ & \left[\frac{1}{x_{a+1} - x_{a+2}}\left(\frac{f - s_a f}{x_a - x_{a+1}} - \frac{s_{a+1}f - (a\ a+2\ a+1)f}{x_a - x_{a+2}}\right)\right. \\ & \left. - \frac{1}{x_a - x_{a+2}}\left(\frac{f - s_a f}{x_a - x_{a+1}} - \frac{(a\ a+1\ a+2)f - (a\ a+2)f}{x_{a+1} - x_{a+2}}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{a+1}\partial_a\partial_{a+1}(f) = {} & \frac{1}{x_{a+1} - x_{a+2}} \\ & \left[\frac{1}{x_a - x_{a+1}}\left(\frac{f - s_{a+1} f}{x_{a+1} - x_{a+2}} - \frac{s_a f - (a\ a+1\ a+2)f}{x_a - x_{a+2}}\right)\right. \\ & \left. - \frac{1}{x_a - x_{a+2}}\left(\frac{f - s_{a+1} f}{x_{a+1} - x_{a+2}} - \frac{(a\ a+2\ a+1)f - (a\ a+2)f}{x_a - x_{a+1}}\right)\right].\end{aligned}$$

Un calcul montre alors que les deux expressions sont égales à

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x_a - x_{a+1})(x_a - x_{a+2})(x_{a+1} - x_{a+2})} & \\ & \left[f - s_a f - s_{a+1} f - (a\ a+2)f\right. \\ & \left. + (a\ a+1\ a+2)f + (a\ a+2\ a+1)f\right].\end{aligned}$$

Soit $\varphi \in \mathrm{End}_{NH_m}(\Bbbk[x_1, \ldots, x_m])$ et $g = \varphi(1)$. Alors $(\varphi \circ \varphi)(1) = g^2$. Donc φ idempotent implique que $g^2 = g$, c'est-à-dire $g = 0$ ou $g = 1$. D'après la structure de module de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_m]$, cela implique $\varphi = 0$ ou $\varphi = id$. Au vu de la proposition 3.7.2, on en conclu que ce dernier est indécomposable. □

Pour chaque permutation $w \in S_m$, on définit $\widehat{w} = s_{a_1} \ldots s_{a_r} \in NH_m$, où $s_{a_1} \ldots s_{a_r}$ est une présentation réduite de w, et $r = l(w)$ (voir la section précédente 8.1). Cet élément ne dépend pas du choix de la présentation d'après les relations et la connexité du graphe $\mathcal{G}(\omega)$ des mots réduits de ω (proposition 8.1.2).

Les carrés des éléments s_a de NH_m étant nuls, l'élément associé comme ci-dessus à un mot $a_1 \ldots a_r$ non réduit de ω, est nul. Soit en effet i le plus grand entier tel que $a_1 \ldots a_i$ soit réduit, et u la permutation correspondante. Alors $v = us_{a_{i+1}}$ est de longueur $i-1$, et si $b_1 \ldots b_{i-1}$ en est un mot réduit, $b_1 \ldots b_{i-1} a_{i+1}$ est un mot réduit de u (pour les détails, on pourra consulter la preuve du théorème 8.1.1). Il vient

$$\widehat{w} = s_{a_1} \ldots s_{a_r} = \widehat{u} s_{a_{i+1}} \ldots s_{a_r} = s_{b_1} \ldots s_{b_{i-1}} s_{a_{i+1}} s_{a_{i+1}} \ldots s_{a_r} = 0.$$

Lemme 8.3.1. Soit u et v deux permutations, alors

$$\widehat{u}\widehat{v} = \begin{cases} \widehat{uv} & \text{si } l(uv) = l(u) + l(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Conséquence de ce qui précède. □

La discussion précédente s'applique de la même manière aux opérateurs ∂_a, qui d'après la proposition précédente vérifient eux aussi les relations de nil-Coxeter. On définit ainsi des opérateurs ∂_ω grâce aux présentations réduites de ω et on a de nouveau le lemme :

Lemme 8.3.2. Soit u et v deux permutations, alors

$$\partial_u \partial_v = \begin{cases} \partial_{uv} & \text{si } l(uv) = l(u) + l(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 8.3.3. Soit ω_0 la permutation de longueur maximale, alors

$$\partial_{\omega_0}(x_1^{m-1} x_2^{m-2} \ldots x_{m-1}) = 1.$$

Démonstration. Conséquence du lemme 8.1.3. □

Proposition 8.3.2. La famille

$$\left(f\,\partial_\omega \ /\ f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \text{ et } \omega \in S_m\right)$$

est libre (i.e. elle définit une famille libre dans le $\Bbbk$-module $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk[x_1, \dots, x_m])$.

Démonstration. Supposons que la famille ne soit pas libre, en d'autres termes, qu'il existe une famille non nulle (f_ω) de polynômes tels que

$$\sum_{\omega \in S_m} f_\omega\,\partial_\omega = 0.$$

Soit u une permutation de longueur minimale telle que f_u soit non nul. Alors il existe une unique permutation v telle que $uv = \omega_0$. Soit $\omega \neq u$ telle que $f_\omega \neq 0$, alors, d'après la minimalité de u, la maximalité de ω_0 et le lemme 8.3.2, $\partial_\omega \partial_v = 0$. Ainsi $f_u\,\partial_{\omega_0} = 0$ et le lemme 8.3.3 permet de conclure. □

Proposition 8.3.3. La famille

$$\left(f\,\widehat{\omega} \ /\ f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_m] \text{ et } \omega \in S_m\right)$$

est une famille génératrice du $\Bbbk$-module NH_m.

Démonstration. Les relations 8.6 permettent de voir par récurrence que tout élément de NH_m est une combinaison linéaire de produits xy, où x est un produit de générateurs x_j et y un produit de générateurs s_j. Les relations 8.5 montre que x s'identifie à un polynôme et la discussion précédente montre que y est soit nul, soit égal à un élément de forme $\widehat{\omega}$. □

Théorème 8.3.1. La famille

$$\left(f\,\widehat{\omega} \ /\ f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_m] \text{ et } \omega \in S_m\right)$$

est une base du $\Bbbk$-module NH_m.

Démonstration. D'après la proposition 8.3.1, on a un morphisme de $\Bbbk$-module de NH_m dans $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk[x_1, \dots, x_m]$ qui envoie la famille génératrice de l'énoncé sur une famille libre (proposition 8.3.2), ce qui prouve le théorème. □

Remarque 8.3.3. Par symétrie, la famille $\left(\widehat{\omega}\,f \ /\ f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_m] \text{ et } \omega \in S_m\right)$ est également une base.

Corollaire 8.3.1. $\Bbbk[x_1,\ldots,x_m]$ s'injecte dans NH_m.

Démonstration. Immédiat. □

Remarque 8.3.4. Comme autre conséquence du théorème, on peut remarquer que la représentation définie dans la proposition 8.3.1 est fidèle. En effet la preuve du théorème montre en particulier que le morphisme $NH_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk[x_1,\ldots,x_m]$ est injectif.
On peut ainsi définir l'algèbre de nilHecke comme l'algèbre unitaire des endomorphismes du $\Bbbk$-module $\Bbbk[x_1,\ldots,x_m]$, engendré par les multiplications par x_k et les opérateurs de différence divisée.

Lemme 8.3.4. Soit $f \in \Bbbk[x_1,\ldots,x_m]$, on a dans NH_m les égalités :

$$s_a f = (s_a.f)s_a + \partial_a(f) \ ,$$

$$f s_a = s_a(s_a.f) + \partial_a(f) \ ,$$

où $s_a.f$ désigne l'action habituelle de la permutation s_a sur le polynôme f.

Démonstration. Par linéarité, il suffit de le vérifier sur les monômes. On procède par récurrence sur le degré total d'un monôme (on prouve la première égalité).

1. Si le degré total est nul, le monôme est 1, et on vérifie bien l'égalité.
2. Supposons l'égalité vérifiée pour les monômes de degré total $d \in \mathbb{N}$. Soit f un monôme de degré $d+1$. f s'écrit $f = x_b g$ avec g monôme de degré d.
Supposons $b \neq a, a+1$, alors $s_a f = s_a x_b g = x_b s_a g = x_b(s_a.g)s_a + x_b\partial_a(g) = (s_a.f)s_a + \partial_a(f)$.
Supposons $b = a$, alors $s_a f = s_a x_a g = x_{a+1} s_a g + g = x_{a+1}(s_a.g)s_a + x_{a+1}\partial_a(g) + g = (s_a.f) + \partial_a(f)$. En effet $\frac{x_a g - x_{a+1}(s_a.g)}{x_a - x_{a+1}} = \frac{x_a g - x_{a+1} g}{x_a - x_{a+1}} + x_{a+1}\frac{g - s_a.g}{x_a - x_{a+1}}$.
Supposons $b = a+1$, alors $s_a f = s_a x_{a+1} g = x_a s_a g - g = x_a(s_a.g)s_a + x_a\partial_a(g) - g = (s_a.f) + \partial_a(f)$. En effet $\frac{x_{a+1} g - x_a(s_a.g)}{x_a - x_{a+1}} = x_{a+1}\frac{g - s_a.g}{x_a - x_{a+1}} - \frac{x_a g - x_{a+1} g}{x_a - x_{a+1}}$.

La première égalité s'écrit aussi $(s_a.f)s_a = s_a f - \partial_a(f)$. En posant $g = s_a.f$, on a alors $g s_a = s_a(s_a.g) - \partial_a(s_a.g) = s_a(s_a.g) + \partial_a(g)$, ce qui prouve la deuxième égalité, l'action de s_a étant bijective. □

Définition 8.3.2. On définit un ordre partiel, appelé ordre de Bruhat, sur l'ensemble S_m des permutations en posant $u \leq v$ si $v = us_{a_1} \cdots s_{a_r}$, avec $r \geq 0$ et si $l(v) = l(u) + r$.

Lemme 8.3.5. Soit $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_m]$ et $w \in S_m$. On a dans NH_m les égalité suivantes :

$$\widehat{\omega} f = (\omega.f)\widehat{\omega} + \sum_{u<\omega} f_u u \ ,$$

$$f\widehat{\omega} = \widehat{\omega}(\omega^{-1}.f) + \sum_{u<\omega} u f'_u \ ,$$

où $\leq$ désigne l'ordre de Bruhat et f_u, f'_u des polynômes de degrés totaux strictement inférieurs à celui de f.

Démonstration. On procède par récurrence sur la longueur de ω (on prouve la première égalité).

1. Si ω est de longueur nulle, $\omega = id$ et on vérifie bien l'égalité.
2. On suppose l'égalité vraie pour les permuations de longueur $l \in \mathbb{N}$. Soit ω de longueur $l+1$ et f un polynôme. ω s'écrit $\omega = vs_a$ avec $l(v) = l$. Ainsi $\widehat{\omega} f = \widehat{v} s_a f = \widehat{v}(s_a.f)s_a + \widehat{v}\partial_a(f) = (\omega.f)\widehat{\omega} + (v.\partial_a(f))\widehat{v} + \sum_{u<v} f_u u$, en utilisant le lemme précédent et l'hypothèse de récurrence. $\partial_a(f)$ étant de degré total strictement inférieur à f, l'égalité est vérifiée pour ω.

On procède de la même manière pour la seconde égalité. □

Proposition 8.3.4. Le centre de l'anneau de nilHecke NH_m est l'anneau des polynômes symétriques en $x_1, \ldots, x_m$.

Démonstration. La définition de NH_m en termes d'opérateurs sur l'algèbre des polynômes permet de voir facilement que les polynômes symétriques sont dans le centre de NH_m. Pour la réciproque il suffit d'adapter la seconde partir de la démonstation de [16, chapitre 3, théorème 3.3.1]), où le théorème 3.2.2 et le lemme 3.2.1, utilisés dans la preuve, correspondent ici au théorème 8.3.1 et au lemme 8.3.5. □

On définit une graduation de NH_m en posant

$$\deg(x_a) = 2 \quad \text{et} \quad \deg(s_a) = -2.$$

Les relations définissant NH_m sont homogènes, ce qui montre que la graduation est bien définie.
Par ailleurs l'action de NH_m définie dans la proposition 8.3.1 fait de $\Bbbk[x_1,\dots,x_m]$ un NH_m-module gradué, et ψ est un anti-morphisme qui préserve la graduation.

Lemme 8.3.6. Les éléments $e_m = {x_1}^{m-1}{x_2}^{m-2}\dots x_{m-1}\widehat{\omega_0}$ et $\psi(e_m) = \widehat{\omega_0}{x_1}^{m-1}{x_2}^{m-2}\dots x_{m-1}$ sont idempotens et de degré 0.

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour e_m. $\deg(e_m) = 0$ est conséquence de $\mathrm{l}(\omega_0) = \frac{\mathrm{m(m-1)}}{2}$. Pour l'idempotence, on utilise la définition de NH_m en termes d'opérateurs. Soit donc f un polynôme, D'après la théorème 2.3.2, le lemme 8.3.3 et le fait que les opérateurs de différence divisée fasse baisser de un le degré total d'un polynôme, $\partial_{\omega_0}(f) = g$, où g est le polynôme symétrique, composante de f par rapport à $x_1^{m-1}x_2^{m-2}\dots x_{m-1}$. Ainsi $e_m^2(f) = g = e_m(f)$, ce qui conclut la démonstration. □

Proposition 8.3.5. $NH_m\psi(e_m)$ est un idéal à gauche gradué, isomorphe en tant que NH_m-module gradué à la représentation polynômiale.

Démonstration. On construit le morphisme de module qui à $f \in \Bbbk[x_1,\dots,x_m]$ associe $f\psi(e_m)$. Vérifions que l'application est bien NH_m-linéaire. L'action des x_a est clairement conservée. On sait d'après le lemme 8.3.4 que $s_a f = (s_a.f)s_a + \partial_a(f)$. Or $s_a\widehat{\omega_0} = 0$ d'après le lemme 8.3.1, ce qui prouve que l'action des s_a est également conservée. Le morphisme préserve clairement la graduation. D'après le theorème 8.3.1 et le lemme 8.3.5, il est injectif. Finalement le lemme 8.3.1 prouve que $NH_m\psi(e_m) = \Bbbk[x_1,\dots,x_m]\psi(e_m)$, ce qui montre que le morphisme est surjectif. □

Proposition 8.3.6. En notant $P_m = \Bbbk[x_1,\dots,x_m]\{-\frac{m(m-1)}{2}\}$ la représentation polynômiale dont la graduation est abaissée de $\frac{m(m-1)}{2}$, on a l'isomorphisme de NH_m-module (à gauche) gradué :

$$NH_m \cong P_m^{[m]!}.$$

De même, en notant ${}_mP = e_m.NH_m\{-\frac{m(m-1)}{2}\}$, on a l'isomorphisme de NH_m-module à droite gradué :

$$NH_m \cong m_P^{[m]!}.$$

Démonstration. Admis pour le premier isomorphisme. Le second s'obtient en appliquant l'anti-involution ψ. □

Définition 8.3.3. On note $L(i^m) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{k}[x_1,x_2,\ldots,x_m]}^{NH_m}(L)$, où L désigne le $\mathbb{k}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$-module $\mathbb{k}$ (muni de la graduation triviale) sur lequel les x_j agissent trivialement.

Lemme 8.3.7. Supposons $\mathbb{k}$ algèbriquement clos. L'espace propre de $L(i^m)$ commun aux opérateurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$ est $1 \otimes L$. Tous les blocs de Jordan de x_1 sont de taille m.

Démonstration. On adapte la démonstration de [16, lemme 4.3.1]. □

Remarque 8.3.5. Notons que les auteurs de l'article [17, lemme 2.1] fournissent une autre démonstration.

Théorème 8.3.2 (*Théorème de Kato)*. Supposons $\mathbb{k}$ algèbriquement clos et soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ une composition de m. Notons Res_μ^m et Res_{m-1}^m la restriction de NH_m respectivement à la sous-$\mathbb{k}$-algèbre homogène

$$NH_\mu \cong NH_{\mu_1} \otimes_{\mathbb{k}} NH_{\mu_2} \otimes_{\mathbb{k}} \cdots \otimes_{\mathbb{k}} NH_{\mu_r}$$

et à la sous-$\mathbb{k}$-algèbre homogène NH_{m-1}.

(a) $L(i^m)$ est l'unique NH_m-module irréductible, à isomorphisme homogène près ;

(b) Les seuls facteurs de composition de $\mathrm{Res}_\mu^m L(i^m)$, à isomorphisme homogène près, sont $L(i^{\mu_1}) \otimes_{\mathbb{k}} L(i^{\mu_2}) \otimes_{\mathbb{k}} \cdots \otimes L(i^{\mu_r})$ et $\mathrm{soc}(\mathrm{Res}_\mu^m L(i^m))$ est irréductible ;

(c) $\mathrm{soc}(\mathrm{Res}_{m-1}^m L(i^m)) = L(i^{m-1})$, à isomorphisme homogène près.

Démonstration. On adapte la démonstration de [16, théorème 4.3.2]. □

9 Les anneaux $R(\nu)$

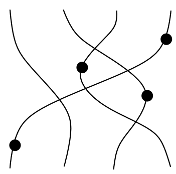
9.1 Construction et définitions

La construction de l'anneau $R(\nu)$ utilise des diagrammes planaires (qui rappelle fortement ceux du groupe des tresses [15]).
Je fixe dès à présent J l'intervalle $[0,1]$ et m un entier dans $\mathbb{N}$.

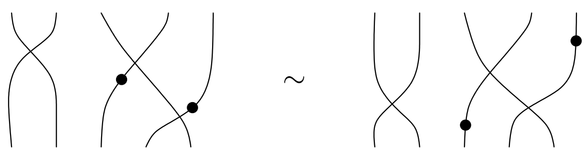
Définition 9.1.1. Soit $s \in \mathbb{N}$. Un diagramme à m brins est la donnée d'une partie $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times J$, union de m intervalles topologiques (homéomorphes à J), appelés les brins, et de s points $c_1, \ldots, c_p$ dans $\mathbb{R}\times]0,1[$, vérifiant les conditions suivantes :
- la projection $\mathbb{R} \times J \to J$ plonge surjectivement chaque brin sur J,
- chaque point de $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{0, 1\}$ appartient à un unique brin,
- chaque point de $\mathbb{R} \times J$ appartient au plus à deux brins, et dans ce cas, le croisement se fait transversalement, c'est-à-dire qu'à homéomorphisme local près, le diagramme ressemble à $\{(x, y) \ / \ xy = 0\}$,
- chaque point c_k appartient à un unique brin.

Par abus de language, on désignera par $\mathcal{D}$ le diagramme.

La condition de transversalité implique en particulier que le nombre de croisements est fini. Voici un exemple de diagramme :



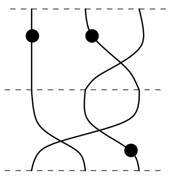
Il faut maintenant pouvoir identifier deux diagrammes quand l'un se déforme continûment vers l'autre :

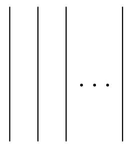


Définition 9.1.2. Deux diagrammes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dits isotopes si $s = s'$ et s'il existe une fonction continue $F : \mathcal{D} \times J \to \mathbb{R} \times J$, de telle sorte que :
- la partie $\mathcal{D}_s = F(\mathcal{D} \times s) \subset \mathbb{R} \times J$ est un diagramme à m brins,
- quelque soit s, $F(., \{s\})$ est injective,

- $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'$,
- quelque soit k, $F(c_k, 1) = c'_k$.

Cette définition implique que les diagrammes $\mathcal{D}_s$ sont deux à deux homéomorphes. On remarque de plus que F fixe les points de $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{0, 1\}$. Il clair que la relation d'isotopie entre les diagrammes est une relation d'équivalence.
De même que pour les tresses, on peut définir une opération de concaténation entre diagrammes, compatible avec la relation d'isotopie. Cette opération est associative et possède un élément neutre évident :

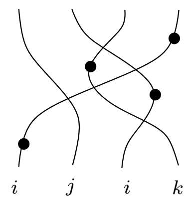




On peut à présent commencer à construire l'anneau $R(\nu)$.
On fixe un graphe Γ, non nécessairement fini, avec I l'ensemble de ses sommets, et E_Γ l'ensemble de ses arrêtes non orientées. On suppose que Γ ne possède ni boucle, ni arrête multiple. Par $\mathbb{N}[I]$ on dénote le monoïde commutatif engendré librement par les sommets de Γ et pour $\nu \in \mathbb{N}[I]$, on note

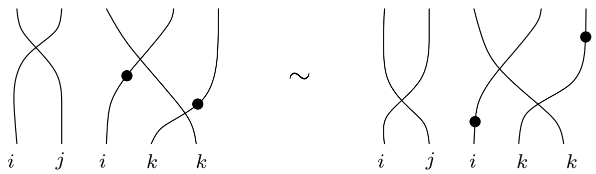
$$\nu = \sum_{i \in I} \nu_i \cdot i \ , \quad \nu_i \in \mathbb{N}. \tag{9.1}$$

Soit $|\nu| = \sum \nu_i \in \mathbb{N}$, et $\mathrm{Supp}(\nu) = \{i \ / \ \nu_i \neq 0\}$. On définit une forme bilinéaire sur $\mathbb{Z}[I]$ par $i \cdot i = 2$, $i \cdot j = -1$ si i et j sont reliés par une arrête, et $i \cdot j = 0$ sinon.
A Γ on va associer des opérations algébriques sur les diagrammes. Pour cela on considère des diagrammes dont chaque brin est indexé en bas par un sommet du graphe. Voici un exemple d'un tel diagramme :



(9.2)

Deux diagrammes indexés sont dits isotopes si ils le sont en tant que diagrammes et si ils sont pareillement indexés :



(9.3)

A partir de maintenant $\mathcal{D}$ désignera un diagramme indexé, ou encore sa classe d'isotopie, et on parlera simplement de diagramme.
Fixons $\nu \in \mathbb{N}[I]$. Soit $\mathrm{Seq}(\nu)$ l'ensemble des séquences de sommets $\boldsymbol{i} = i_1 \dots i_m$, telle que $i_k \in I$ pour chaque k et telle que le sommet i apparaît ν_i fois dans la séquence. La longueur m de la séquence est égale à $|\nu|$. Par exemple,

$$\mathrm{Seq}(2i + j) = \{iij, iji, jii\}.$$

Chaque diagramme $\mathcal{D}$ détermine deux séquences $\mathrm{bot}(D)$ et $\mathrm{top}(D)$ dans $\mathrm{Seq}(\nu)$ pour un certain ν. La séquence $\mathrm{bot}(D)$, appelée séquence basse est donnée par la lecture de l'indexage des brins, en bas, de gauche à droite. On définit $\mathrm{top}(D)$, la séquence haute, de la même manière. Par exemple, pour le diagramme 9.2, $\mathrm{bot}(D) = ijik$ et $\mathrm{top}(D) = jiki$. On abrège souvent les séquences avec plusieurs termes consécutifs égaux, et on écrit $i_1^{n_1} \dots i_r^{n_r}$ pour $i_1 \dots i_1 i_2 \dots i_2 \dots i_r \dots i_r$, où $n_1 + \dots + n_r = m$.

Proposition 9.1.1. Le cardinal de $\mathrm{Seq}(\nu)$ est égal à $|\nu|! / \prod_{i \in I} \nu_i!$.

Démonstration. Notons $i_1, \dots, i_r$ les r sommets distincts de $\mathrm{Supp}(\nu)$. Le groupe symétrique S_m agit de façon naturelle sur $\mathrm{Seq}(\nu)$. Cette opération étant clairement transitive, on a alors

$$|\mathrm{Seq}(\nu)| = |\mathrm{Orb}(\mathrm{i_1}^{\nu_{\mathrm{i_1}}} \dots \mathrm{i_r}^{\nu_{\mathrm{i_r}}})| = |S_m| \,/\, |\mathrm{Stab}(\mathrm{i_1}^{\nu_{\mathrm{i_1}}} \dots \mathrm{i_r}^{\nu_{\mathrm{i_r}}})| \ .$$

On conclut alors en remarquant que le stabilisateur de ${i_1}^{\nu_{i_1}} \dots {i_r}^{\nu_r}$ sont les permutations qui laissent stable les r ensembles

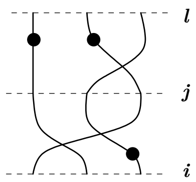
$$\{1, \dots, \nu_{i_1}\} \quad \{\nu_{i_1} + 1, \dots, \nu_{i_1} + \nu_{i_2}\} \quad \cdots \quad \{\nu_{i_{r-1}} + 1, \dots, m\}.$$

$\square$

On note $\widetilde{R}(\nu)$ le groupe commutatif libre engendré par les classes d'isotopie de diagrammes. Il s'agit donc des combinaisons linéaires finies à coefficients entiers de classes de diagrammes. On a alors :

$$\widetilde{R}(\nu) = \bigoplus_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu)} {}_{\boldsymbol{j}}\widetilde{R}(\nu)_{\boldsymbol{i}} \ , \tag{9.4}$$

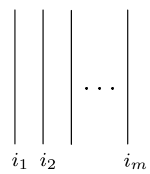
où ${}_{\boldsymbol{j}}\widetilde{R}(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ est le sous-groupe des combinaisons linéaires des diagrammes $\mathcal{D}$ tels que $\mathrm{bot}(\mathcal{D}) = \boldsymbol{j}$ et $\mathrm{top}(\mathcal{D}) = \boldsymbol{j}$.
On définit un produit sur $\widetilde{R}(\nu)$, pour $\mathcal{D}' \in {}_{\boldsymbol{l}}\widetilde{R}(\nu)_{\boldsymbol{k}}$ et $\mathcal{D} \in {}_{\boldsymbol{j}}\widetilde{R}(\nu)_{\boldsymbol{i}}$, par $\mathcal{D}'\mathcal{D} = 0$ si $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{j}$ et par concaténation de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ sinon (voir le diagramme 9.5 ci-dessous). Les diagrammes étant une base du $\mathbb{Z}$-module $\widetilde{R}(\nu)$, ce qui précède définit une application bilinéaire sur $\widetilde{R}(\nu)$, et par suite muni ce dernier d'une structure d'anneau associatif.



(9.5)

Pour chaque $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$, le diagramme $1_{\boldsymbol{i}} \in {}_{\boldsymbol{i}}\widetilde{R}(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ (9.6) est un élément idempotent ($1_{\boldsymbol{i}}^2 = 1_{\boldsymbol{i}}$) et vérifie $x1_{\boldsymbol{i}} = x$ pour tout $x \in {}_{\boldsymbol{j}}\widetilde{R}(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ et $1_{\boldsymbol{i}}x = x$ pour tout $x \in {}_{\boldsymbol{i}}\widetilde{R}(\nu)_{\boldsymbol{j}}$, pour tout $\boldsymbol{j}$. De plus, $1 = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)} 1_{\boldsymbol{i}}$ est l'élément unité de $\widetilde{R}(\nu)$.

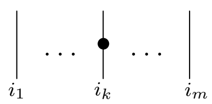
$1(\boldsymbol{i}) \quad :=$



(9.6)

Pour une séquence $\boldsymbol{i} = i_1 i_2 \dots i_m \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $1 \leq k \leq m$ on note

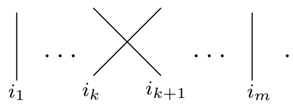
$x_k(\boldsymbol{i}) \quad :=$



(9.7)

avec le point positionné sur le k-ième brin en partant de la gauche, et

$$\delta_k(\boldsymbol{i}) \quad := \tag{9.8}$$



Le groupe symétrique S_m agit sur $\mathrm{Seq}(\nu)$, $m = |\nu|$ par permutations (cette action était utilisée dans la démonstration de la proposition 9.1.1). Les transpositions $s_k = (k, k+1)$ échangent les mots i_k et i_{k+1} dans la séquence $\boldsymbol{i}$. Ainsi $\delta_k(\boldsymbol{i}) \in {}_{s_k\,\boldsymbol{i}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}$.

L'objet du théorème suivant va être de donner une présentation par générateurs et relation de l'anneau $R(\nu)$.

Théorème 9.1.1. L'anneau $\widetilde{R}(\nu)$ est engendré par les éléments $1(\boldsymbol{i})$, $x_k(\boldsymbol{i})$, $\delta_k(\boldsymbol{i})$ et défini par les relations :

$$1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) = 1(\boldsymbol{i}) \tag{9.9}$$

$$\begin{array}{rclcl} 1(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) & = & x_k(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) & = & x_k(\boldsymbol{i}) \\ 1(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) & = & \delta_k(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) & = & \delta_k(\boldsymbol{i}) \end{array} \tag{9.10}$$

$$\begin{array}{rcll} x_k(\boldsymbol{i})\ x_{k'}(\boldsymbol{i}) & = & x_{k'}(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) & \\ \delta_a(\boldsymbol{i})\ x_b(\boldsymbol{i}) & = & x_b(s_a\,\boldsymbol{i})\ \delta_a(\boldsymbol{i}) & \text{si } b \neq a, a+1 \\ \delta_k(s_{k'}\,\boldsymbol{i}\ \delta_{k'}(\boldsymbol{i}) & = & \delta_{k'}(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) & \text{si } |k'-k| > 1 \end{array} \tag{9.11}$$

$$\begin{array}{rcll} 1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{j}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \\ 1(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{j}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \\ x_k(\boldsymbol{j})\ 1(\boldsymbol{i}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \\ 1(\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{j}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq s_k\,\boldsymbol{j} \\ \delta_k(\boldsymbol{j})\ 1_(\boldsymbol{i}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \\ x_k(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{j}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \\ x_k(\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{j}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq s_k\,\boldsymbol{j} \\ \delta_k(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{j}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \\ \delta_k(\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{j}) & = & 0 & \text{si } \boldsymbol{i} \neq s_k\,\boldsymbol{j} \end{array} \tag{9.12}$$

Démonstration. On considère l'anneau associatif unitaire libre engendré par éléments $1^l(\boldsymbol{i})$, $x_k^l(\boldsymbol{i})$, $\delta_k^l(\boldsymbol{i})$ et quotienté par les relations écrites dans l'énoncé du théorème. On note cet anneau $\widetilde{R}_l(\nu)$. Ces relations sont vérifiées dans $\widetilde{R}(\nu)$, on a ainsi un morphisme d'anneau unitaire $\varphi : \widetilde{R}_l(\nu) \to \widetilde{R}(\nu)$. Montrons la surjectivité.

Pour cela, il suffit de montrer que tout diagramme est image d'un élément de $\widetilde{R}_l(\nu)$. Soit $\mathcal{D}$ un diagramme à m brins, on peut alors supposer, à isotopie près, que les points c_k et les croisements sont d'ordonnées distinctes. En subdivisant J en un nombre fini d'intervalles J_i tels que les parties $\mathbb{R} \times J_i$ contiennent chacun soit un point c_k, soit un croisement, on voit alors que le diagramme est isotope à la concaténation d'éléments du type $x_k(\boldsymbol{i})$ ou $\delta_k(\boldsymbol{i})$.

Montrons maintenant l'injectivité. Pour ce faire, on va construire une application ψ de $\widetilde{R}(\nu)$ vers $\widetilde{R}_l(\nu)$ telle que $\psi \circ \varphi = id$. La démarche va être la suivante. A chaque diagramme $\mathcal{D}$, nous allons associer un élément de $\widetilde{R}_l(\nu)$ et montrer qu'il ne dépend que de la classe d'isotopie de $\mathcal{D}$. Cela définira par extension ψ, en considérant $\widetilde{R}(\nu)$ comme un groupe commutatif libre. On verra alors que φ "commute" avec les produits des deux anneaux, en le vérifiant sur les diagrammes, générateurs du groupe libre. φ étant maintenant un morphisme d'anneau unitaire, on vérifiera pour finir l'égalité $\psi \circ \varphi = id$ sur les générateurs $1^l(\boldsymbol{i})$, $x_k^l(\boldsymbol{i})$, $\delta_k^l(\boldsymbol{i})$ de l'anneau $\widetilde{R}_l(\nu)$.

Soit $\mathcal{D}$ un diagramme. On ordonne ensemble les points et les croisements (on suppose ici que leur union est non vide) de $\mathcal{D}$ par l'ordre lexicographique "naturel" sur leurs coordonnées (x, y) :

$$(0,1) < (1,1) < (0,0) < (1,0) \ ,$$

et on les note $e_1, \dots, e_n$. On associe alors à $\mathcal{D}$ le produit $e_1^l \dots e_n^l$, où les e_α^l sont des générateurs du type $x_{k_\alpha}^l(\boldsymbol{i}_\alpha)$ ou $\delta_{k_\alpha}^l(\boldsymbol{i}_\alpha)$. Le choix du générateur ainsi que de l'indice $\boldsymbol{i}_\alpha$ et du brin k_α se fait de façon évidente en commançant par $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = n$ en fonction de l'indice top($\mathcal{D}$). Dans le cas où $\mathcal{D}$ ne possède ni point, ni croisement, on lui associe $1^l(\boldsymbol{i})$.

La relation d'isotopie conservant le nombre de points et de croisements, tout diagramme isotope à $1_{\boldsymbol{i}}$ s'envoie sur le même élément.
On munit à présent $\widetilde{R}_l(\nu)$ de la topologie discrète. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux diagrammes isotopes (dont on suppose les unions des croisements et des points non vides) et F la transformation correspondante. On alors une application naturelle $F_l : J \to \widetilde{R}_l(\nu)$, montrons qu'elle est continue, ce qui prouvera, par connexité de J, que la construction précédente ne dépend que de la classe d'isotopie. Soit $s_0 \in J$, si l'ensemble des points et des sommets de $\mathcal{D}_{s_0}$ sont d'ordonnées distinctes, il existe un voisinage de s_0, pour lequel l'ordre lexicographique associé aux $\mathcal{D}_s$ reste inchangé. Donc F_l est continue en s_0. Dans

l'autre cas, on peut trouver un voisinage de s_0, pour lequel, d'un s à un autre, les permutations de croisements et de points se font seulement dans les groupements de même ordonnée. Or ces éléments de même ordonnés sont alors obligatoirement situés sur des brins distincts, donc d'après les relations de $\widetilde{R}_l(\nu)$, l'image des différents $\mathcal{D}_s$ est constante pour s variant dans cet interval. Cela prouve que F_l est continu en s_0 une nouvelle fois.

On vérifie clairement que l'image de la concaténation de deux diagrammes est le produit des deux images, ce qui prouve que ψ est un morphisme d'anneau (unitaire comme on peut facilement, aussi, le vérifier). Il est ensuite de nouveau clair que $\psi \circ \varphi = id$ sur les générateurs $1^l(\boldsymbol{i})$, $x_k^l(\boldsymbol{i})$, $\delta_k^l(\boldsymbol{i})$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

La présentation précédente avait l'avantage de lister clairement les relations de l'anneau $\widetilde{R}(\nu)$ mais le désavantage d'être longue. On remarque qu'elle peut se raccourcir.

Théorème 9.1.2. L'anneau $\widetilde{R}(\nu)$ est engendré par les éléments $1(\boldsymbol{i})$, $x_k(\boldsymbol{i})$, $\delta_k(\boldsymbol{i})$ et défini par les relations :

$$1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) = 1(\boldsymbol{i}) \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned} &1(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) = x_k(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) = x_k(\boldsymbol{i}) \\ &1(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) = \delta_k(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) = \delta_k(\boldsymbol{i}) \end{aligned} \tag{9.10}$$

$$\begin{aligned} &x_k(\boldsymbol{i})\ x_{k'}(\boldsymbol{i}) = x_{k'}(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) \\ &\delta_k(s_{k'}(\boldsymbol{i})\ \delta_{k'}(\boldsymbol{i}) = \delta_{k'}(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) \quad \text{si } |k'-k| > 1. \end{aligned} \tag{9.11}$$

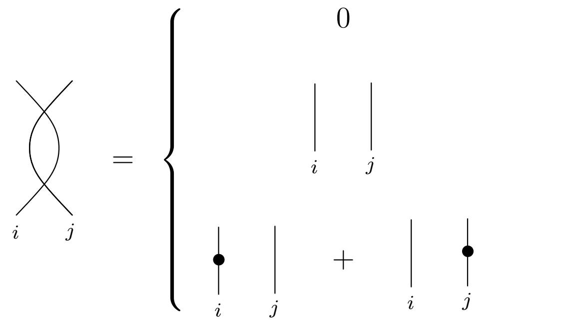
$$1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{j}) = 0 \quad \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \tag{9.12}$$

Démonstration. Il faut juste remarquer que les relations 9.12 supprimées découlent de $1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{j}) = 0$ et du fait que les élements $1(\boldsymbol{i})$ agissent en quelque sorte comme des éléments "unité". Par exemple

$$x_k(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{j}) = x_k(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{j})\ x_k(\boldsymbol{j}) = 0 \quad \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}.$$

$\square$

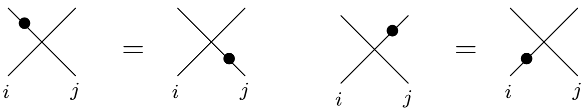
La définition de l'anneau $R(\nu)$ est maintenant possible, on impose aux diagrammes certaines relations "locales" :



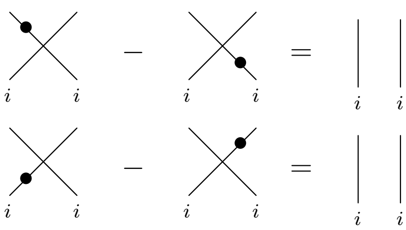
si $i = j$,

si $i \cdot j = 0$,

si $i \cdot j = -1$. (9.13)

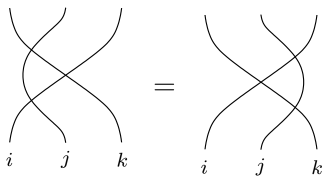


pour $i \neq j$ (9.14)

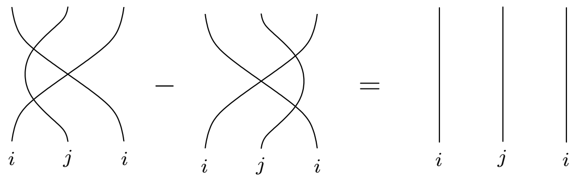


(9.15)

(9.16)



si $i \neq k$ ou $i \cdot j \neq -1$ (9.17)



si $i \cdot j = -1$ (9.18)

Définition 9.1.3. On note $R(\nu)$, l'anneau associatif unitaire, $\widetilde{R}(\nu)$, quotienté par les relations suivantes :

$$\delta_k(s_k\,\boldsymbol{i})\;\delta_k(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_k = i_{k+1} \\ 1(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_k \cdot i_{k+1} = 0 \\ x_k(\boldsymbol{i}) + x_{k+1}(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_k \cdot i_{k+1} = -1 \end{cases} \tag{9.13}$$

$$\begin{aligned} x_k(s_k\,\boldsymbol{i})\;\delta_k(\boldsymbol{i}) &= \delta_k(\boldsymbol{i})\;x_{k+1}(\boldsymbol{i}) \\ x_{k+1}(s_k\,\boldsymbol{i})\;\delta_k(\boldsymbol{i}) &= \delta_k(\boldsymbol{i})\;x_k(\boldsymbol{i}) \end{aligned} \qquad \text{si } i_k \neq i_{k+1} \tag{9.14}$$

$$x_{k,s_k(i)}\;\delta_k(\boldsymbol{i}) - \delta_k(\boldsymbol{i})\;x_{k+1,i} = 1(\boldsymbol{i}) \qquad \text{si } i_k = i_{k+1} \tag{9.15}$$

$$\delta_k(\boldsymbol{i})\;x_k(\boldsymbol{i}) - x_{k+1,s_k(i)}\;\delta_k(\boldsymbol{i}) = 1(\boldsymbol{i}) \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned} &\delta_k(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\;\delta_{k+1}(s_k\,\boldsymbol{i})\;\delta_k(\boldsymbol{i}) \\ &\quad = \delta_{k+1}(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\;\delta_k(s_k\,\boldsymbol{i})\;\delta_{k+1}(\boldsymbol{i}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{si } i_k \neq i_{k+2} \\ &\text{ou } i_k \cdot i_{k+1} \neq -1 \end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\begin{aligned} &\delta_k(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\;\delta_{k+1}(s_k\,\boldsymbol{i})\;\delta_k(\boldsymbol{i}) \\ &\quad - \delta_{k+1}(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\;\delta_k(s_k\,\boldsymbol{i})\;\delta_{k+1}(\boldsymbol{i}) = 1(\boldsymbol{i}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{si } i_k = i_{k+2} \\ &\text{et } i_k \cdot i_{k+1} = -1 \end{aligned} \tag{9.18}$$

Théorème 9.1.3. L'anneau $R(\nu)$ est engendré par les éléments $1(\boldsymbol{i})$, $x_k(\boldsymbol{i})$, $\delta_k(\boldsymbol{i})$ et défini par les relations :

$$1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) = 1(\boldsymbol{i}) \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned} &1(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) = x_k(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) = x_k(\boldsymbol{i}) \\ &1(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) = \delta_k(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{i}) = \delta_k(\boldsymbol{i}) \end{aligned} \tag{9.10}$$

$$\begin{aligned} &x_k(\boldsymbol{i})\ x_{k'}(\boldsymbol{i}) = x_{k'}(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) \\ &\delta_k(s_{k'}\,(\boldsymbol{i})\ \delta_{k'}(\boldsymbol{i}) = \delta_{k'}(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) \quad \text{si } |k'-k|>1. \end{aligned} \tag{9.11}$$

$$1(\boldsymbol{i})\ 1(\boldsymbol{j}) = 0 \quad \text{si } \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \tag{9.12}$$

$$\delta_k(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_k = i_{k+1} \\ 1(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_k \cdot i_{k+1} = 0 \\ x_k(\boldsymbol{i}) + x_{k+1}(\boldsymbol{i}) & \text{si } i_k \cdot i_{k+1} = -1 \end{cases} \tag{9.13}$$

$$\left.\begin{aligned} x_k(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) &= \delta_k(\boldsymbol{i})\ x_{k+1}(\boldsymbol{i}) \\ x_{k+1}(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) &= \delta_k(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) \end{aligned}\right. \quad \text{si } i_k \neq i_{k+1} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned} x_{k,s_k(\boldsymbol{i})}\ \delta_k(\boldsymbol{i}) - \delta_k(\boldsymbol{i})\ x_{k+1,\boldsymbol{i}} &= 1(\boldsymbol{i}) \quad \text{si } i_k = i_{k+1} & (9.15) \\ \delta_k(\boldsymbol{i})\ x_k(\boldsymbol{i}) - x_{k+1,s_k(\boldsymbol{i})}\ \delta_k(\boldsymbol{i}) &= 1(\boldsymbol{i}) & (9.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\delta_k(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\ \delta_{k+1}(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) && \text{si } i_k \neq i_{k+2} \\ &\quad = \delta_{k+1}(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_{k+1}(\boldsymbol{i}) && \text{ou } i_k \cdot i_{k+1} \neq -1 \end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\begin{aligned} &\delta_k(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\ \delta_{k+1}(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(\boldsymbol{i}) && \text{si } i_k = i_{k+2} \\ &\quad - \delta_{k+1}(s_k\,s_{k+1}\,\boldsymbol{i})\ \delta_k(s_k\,\boldsymbol{i})\ \delta_{k+1}(\boldsymbol{i}) = 1(\boldsymbol{i}) && \text{et } i_k \cdot i_{k+1} = -1 \end{aligned} \tag{9.18}$$

La présentation par générateurs et relations de l'anneau $R(\nu)$ permet de vérifier que la graduation suivante est cohérente (les relations sont homogènes) :

$$\deg\big(1(\boldsymbol{i})\big) = 0, \quad \deg\big(x_k(\boldsymbol{i})\big) = 2, \quad \deg\big(\delta_k(\boldsymbol{i})\big) = -i_k \cdot i_{k+1}\ . \tag{9.19}$$

On définit ${}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ pour $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu)$, comme le projeté de $jRti \subseteq \widetilde{R}(\nu)$ dans $R(\nu)$.

Proposition 9.1.2. $R(\nu)$ est la somme directe des iRj pour $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ variant dans $\mathrm{Seq}(\nu)$.

Démonstration. L'idéal bilatère qui définit $R(\nu)$ à partir de $\widetilde{R}(\nu)$ est engendré par des éléments appartenant aux sous-$\Bbbk$-modules $iRtj$. □

On note

$$P_{\boldsymbol{i}} = \bigoplus_{\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu)} {}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}} \ , \ \ {}_{\boldsymbol{j}}P = \bigoplus_{\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)} {}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}} \ . \tag{9.20}$$

On voit que $P_{\boldsymbol{i}}$ et ${}_{\boldsymbol{j}}P$ sont respectivement des idéaux à gauche et à droite de $R(\nu)$ engendrés par les éléments homogènes $1(\boldsymbol{i})$, $x_k(\boldsymbol{i})$, $\delta_k(\boldsymbol{i})$ et $1(\boldsymbol{j})$, $x_k(\boldsymbol{j})$, $\delta_k(\boldsymbol{j})$. Cela en fait respectivement des modules $R(\nu)$-projectifs gradués à gauche et à droite.

On définit une anti-involution ψ en envoyant chaque diagramme sur son symétrique par rapport à un axe horizontal. On vérifie alors que cette définition est cohérente avec l'isométrie et définit donc clairement une anti-involution de $\widetilde{R}(\nu)$. La définition est de plus compatible avec les relations de la définition 9.1.3, donc ψ est bien une anti-involution de $R(\nu)$, envoyant ${}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ sur ${}_{\boldsymbol{i}}R(\nu)_{\boldsymbol{j}}$ et $1(\boldsymbol{i})$ sur $1(\boldsymbol{i})$.
On vérifie de la même manière que, prendre le symétrique d'un diagramme par rapport à un axe vertical et le multiplier par $(-1)^s$, où s est le nombre de croisements du diagramme, définit une involution σ de $R(\nu)$. On vérifie que σ et ψ commutent.

Voici un lemme qui sera utile dans la suite :

Lemme 9.1.1. Soient $\nu_1, \ldots, \nu_r$ des éléments de $\mathbb{N}[I]$ et $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_r$ leur somme. On a un morphisme naturel de $\Bbbk$-algèbre graduée (le morphisme n'est toutefois pas unitaire) :

$$R(\nu_1) \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} R(\nu_r) \longrightarrow R(\nu) \ ,$$

qui au produit tensoriel de diagrammes $D_1 \otimes \cdots \otimes D_r$ associe le diagramme D obtenu en justaposant de gauche à droite les diagrammes D_j.

Démonstration. Le fait que, D_j et D'_j isotopes pour chaque $j = 1, dots, r$ impliquent que les juxtapositons D et D' construites respectivement à partir des D_j et D'_j le sont aussi, montre que l'on peut définir par extension une application multi-$\Bbbk$-linéaire de $\widetilde{R}(\nu_1) \times \cdots \times \widetilde{R}(\nu_r)$ dans $\widetilde{R}(\nu)$, et par composition dans $R(\nu)$. Il est ensuite clair que l'on peut passer aux quotients $R(\nu_j)$ (les relations locales entre diagrammes d'un $\widetilde{R}(\nu_j)$ sont vérifiées dans $R(\nu)$ après justaposition d'éléments à gauche et à droite), ce qui donne une application multi-$\Bbbk$-linéaire de $R(\nu_1) \times \cdots \times R(\nu_r)$ dans $R(\nu)$, et donc une application $\Bbbk$-linéaire de $R(\nu_1) \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} R(\nu_r)$ dans $R(\nu)$. On vérifie enfin qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbre. Le fait que ce soit un morphisme d'algèbre graduée se voit en remarquant que les générateurs homogènes du produit tensoriel, obtenus naturellement à partir de ceux des $R(\nu_j)$ sont envoyés sur des éléments homogènes dans $R\nu)$ de même degré. □

Nous verrons plus loin (lemme 9.3.1) que ce morphisme est injectif.

9.2 Exemples

1) $\nu = 0$. Alors $R(0) = \mathbb{Z}$, où l'élément unité est le diagramme vide.
2) $\nu = i$ avec i un sommet. Un diagramme est alors une ligne avec un certain nombres de points. Ainsi $R(i) = \mathbb{Z}[x_1(i)]$. En effet, $R(i)$ n'est engendré que par $1(i)$ et $x_1(i)$, et les relations qui le définissent se résument à dire que $1(i)$ est l'élément neutre.

$x_1(i) \quad =$ 

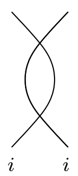
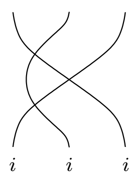
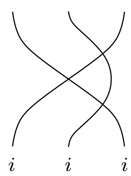
3) $\nu = mi$ avec i un sommet. L'unique séquence est i^m. Les relations "locales" se réduisent alors à :

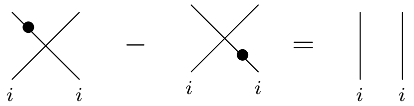
$$\delta_a(i^m)\ \delta_a(i^m) = 0 \tag{9.13}$$

$$\delta_a(i^m)\ x_a(i^m) - x_{a+1}(i^m)\ \delta_a(i^m) = 1(i^m) \tag{9.15}$$
$$x_a(i^m)\ \delta_a(i^m) - \delta_a(i^m)\ x_{a+1}(i^m) = 1(i^m) \tag{9.16}$$

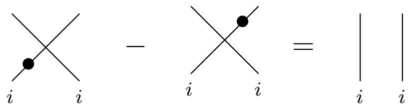
$$\delta_a(i^m)\ \delta_{a+1}(i^m)\ \delta_a(i^m) = \delta_{a+1}(i^m)\ \delta_a(i^m)\ \delta_{a+1}(i^m) \tag{9.17}$$

Ou encore :

 $= \quad 0 \quad$ (9.13)  $=$  (9.17)



(9.15)



(9.16)

Les relations du théorème 9.1.2, quant à elle, se présentent de la manière suivante :

$$1(i^m)\ 1(i^m) = 1(i^m) \tag{9.9}$$

$$\begin{array}{l} 1(i^m)\ x_a(i^m) = x_a(i^m)\ 1(i^m) = x_a(i^m) \\ 1(i^m)\ \delta_a(i^m) = \delta_a(i^m)\ 1(i^m) = \delta_a(i^m) \end{array} \tag{9.10}$$

$$\begin{array}{ll} x_a(i^m)\ x_b(i^m) = x_b(i^m)\ x_a(i^m) & \\ \delta_a(i^m)\ x_b(i^m) = x_b(i^m)\ \delta_a(i^m) & \text{si } b \neq a, a+1 \\ \delta_a(s_{a'}(i^m)\ \delta_b(i^m) = \delta_b(s_a i^m)\ \delta_a(i^m) & \text{si } |b-a| > 1. \end{array} \tag{9.11}$$

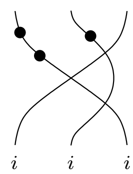
Proposition 9.2.1. La $\Bbbk$-algèbre $R(i^m)$ est isomorphe à l'algèbre de nil-Hecke NH_m.
$1(i^m)$ est identifié à 1, $x_a(i^m)$ à x_a et $\delta_a(i^m)$ à s_a.

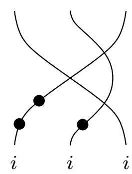
Démonstration. Les jeus de relations établies précédemment pour $R(mi)$ établissent d'une part $1(mi)$ comme élément neutre, et sont d'autre part les relations définissant NH_m d'après la définition 8.3.1. □

Définition 9.2.1. On note $P_{i,m}$ (resp. ${}_{i,m}P$) le $R(mi)$-module à gauche (resp. à droite) gradué correspondant au NH_m-module P_m (resp. ${}_mP$), $e_{i,m} \in R(mi)$ l'idempotent correspondant à e_m.

Remarque 9.2.1. L'anti-involution ψ définie pour $R(mi)$ correspond à l'anti-involution définie pour NH_m dans la remarque 8.3.2.

Voici les diagrammes donnés dans l'article de $e_{i,m}$ et $\psi(e_{i,m})$ pour $m = 3$:

$e_{i,3}$ = 

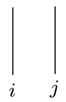
$\psi(e_{i,3})$ = 

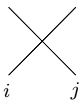
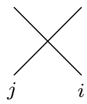
(9.21)

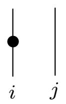
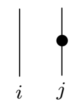
4) $\nu = i+j$ avec $i \cdot j = 0$. $\mathrm{Seq}(i+j) = \{ij, ji\}$. On note $\mathbf{A}$ l'anneau $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$.

Proposition 9.2.2. *$R(\nu)$ est isomorphe à l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbf{A})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$.*

Démonstration. L'isomorphisme φ est donné sur les générateurs par :

 $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

 $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (9.22)

 $\leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On construit le morphisme réciproque ψ en définissant tout d'abord une application $\mathbb{Z}$-linéaire du $\mathbb{Z}$-module libre des matrices vers $R(\nu)$, en envoyant respectivement les matrices

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{9.23}$$

sur

$$\begin{matrix} x_1(ij)^{\alpha_1}\ x_2(ij)^{\alpha_2}\ 1(ij) & \delta_1(ji)\ x_2(ji)^{\alpha_1}\ x_1(ji)^{\alpha_2} \\ \\ \delta_1(ij)\ x_1(ij)^{\alpha_1}\ x_2(ij)^{\alpha_2} & x_2(ji)^{\alpha_1}\ x_1(ji)^{\alpha_2}\ 1(ij) \end{matrix}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$.

On voit que les correspondances 9.22 définissent un morphisme d'anneau en remarquant que les relations de $R(\nu)$ restent vérifiées dans $M_2(\mathbf{A})$. Par ailleurs, on vérifie, sur les matrices 9.23, que ψ est un morphisme d'anneau. Le fait que φ et ψ soient inverses l'un de l'autre se vérifie sur les générateurs de $R(\nu)$ d'un côté et sur les matrices 9.23, base du $\mathbb{Z}$-module $M_2(\mathbf{A})$, de l'autre. Tout cela revient à faire un certain nombre de calculs simples. Toutefois, nous verrons dans les exemples suivants, des cas plus généraux, où ces calculs se trouvent finalement simplifiés. $\square$

5) $\nu = i_1 + \cdots + i_m$ avec $i_k \cdot i_l = 0$ pour tout $k \neq l$. On note $\mathbf{A}$ l'anneau $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$.

Proposition 9.2.3. $R(\nu)$ est isomorphe à l'anneau $M_{m!}(\mathbf{A})$ des matrices carrées de taille $m!$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$.

Démonstration. Il s'agit d'une généralisation de l'exemple précédent, et on peut donner une description plus explicite de l'isomorphisme. On indexe pour cela les lignes et les colonnes des matrices par les éléments de $\mathrm{Seq}(\nu)$, et à chaque diagramme $\mathcal{D}$ on associe la matrice dont le seul coefficient non nul se trouve sur la ligne indexée par la séquence haute $\mathrm{top}(\mathcal{D})$, et sur la colonne indexée par la séquence basse $\mathrm{bot}(\mathcal{D})$. La valeur de ce coefficent est $x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$ où α_k est le nombre de points sur le brin indexé par le sommet i_k.

Cette description fournit la matrice à associer à chaque générateur de $R(\nu)$ (on retrouve les correspondances 9.22 dans le cas particulier de l'exemple précédent) et on vérifie alors que cela définit un morphisme d'anneau φ. De plus, les relations 9.14 montrent que φ est bien l'application décrite précédemment.

Elle fournit également le morphisme inverse ψ, en considérant comme dans l'exemple précédent, la base canonique du $\mathbb{Z}$-module $M_{m!}(\mathbf{A})$.
En effet, soient $M = {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_m}^{\alpha_m} E_{\boldsymbol{ij}}$, $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ des séquences de $\mathrm{Seq}(\nu)$ et ω la permutation de S_m qui envoie $\boldsymbol{j}$ sur $\boldsymbol{i}$. On considère une présentation $s_{a_1} \ldots s_{a_p}$ de ω. On associe à la matrice M le produit

$$\delta_{a_p}(s_{a_p}\boldsymbol{j}) \ \ldots \ \delta_{a_1}(\boldsymbol{i}) \ x_{\tau(1)}^{\alpha_1}(\boldsymbol{i}) \ \ldots \ x_{\tau(m)}^{\alpha_m}(\boldsymbol{i}) \ , \tag{9.24}$$

correspondant naturellement à cette présentation, où τ est la permutation qui envoie la séquence $i_1 \ldots i_m$ sur $\boldsymbol{i}$. On remarque que cet élément de $R(\nu)$ ne dépend pas de la présentation d'après 9.13, 9.18 et les théorème 2.1.1, 8.1.1 (voir la section sur les présentations par générateurs et relations 2.1 et la section sur le groupe symétrique 8.1). Vérifions qu'il s'agit bien d'un morphisme d'anneau.

Il suffit de vérifier sur la base canonique du $\mathbb{Z}$-module de $M_{m!}(\mathbf{A})$ que

le produit commute avec ψ. Soient $M = {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_m}^{\alpha_m} \, E_{\boldsymbol{ij}}$ et $M' = {x_1}^{\alpha'_1} \ldots {x_m}^{\alpha'_m} \, E_{\boldsymbol{i'j'}}$ deux matrices. Si $\boldsymbol{j} \neq \mathbf{i}'$, le produit MM' est nul, tout comme le produit de leurs images. Sinon, ce sont les relations 9.14 qui permettent de conclure.
Il reste à voir que les deux morphismes sont inverses l'un de l'autre. On vérifie immédiatement que $\psi \circ \varphi = id$ sur les générateurs de l'anneau $R(\nu)$. Dans l'autre sens, on remarque que la famille

$$(E_{\boldsymbol{ij}} \ / \ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu)) \ \cup \ (x_k \, E_{\boldsymbol{jj}} \ / \ \boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu) \text{ et } k \geq 0) \tag{9.25}$$

est génératrice, et que la $\varphi \circ \psi$ fait également l'identité dessus. □

6) $\nu = \nu' + \nu''$, où $i \cdot j = 0$ pour tout $i \in Seq(\nu')$ et $j \in Seq(\nu'')$.
On note $\mathbf{A}$ l'anneau $R(\nu') \otimes_{\mathbb{Z}} R(\nu'')$, $p = |\nu'|$, $q = |\nu''|$ et $n = p!q!/m!$ (où $m = |\nu| = p + q$).

Proposition 9.2.4. L'anneau $R(\nu)$ est isomorphe à l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbf{A})$ des matrices carrées de taille $|\nu|! \, |\nu'|! \,/\, |\nu''|!$ à coefficient dans $R(\nu') \otimes_{\mathbb{Z}} R(\nu'')$.

Démonstration. $n = p!q!/m!$ est le nombre de permutations, appelées battages de type $(p, q$, dans S_m, dont les seules inversions possibles concernent les couples (i, j) tels que $1 \leq i \leq |\nu'|$ et $|\nu'| + 1 \leq j \leq m$. En effet, l'ensemble de telles permutations, que l'on note $B(p, q)$, est en bijection avec S_m quotienté par les permutations qui fixe $\{1, \cdots, p\}$ et $\{p + 1, \cdots, m\}$.

Pour construire l'isomorphisme, on indexe les lignes et les colonnes des matrices par $B(p, q)$. Soit $\mathcal{D}$ un diagramme et $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ les séquences basse et haute de D. Il existe des uniques séquences $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}' \in \mathrm{Seq}(\nu')$ et $\boldsymbol{i}'', \boldsymbol{j}'' \in \mathrm{Seq}(\nu'')$, et deux uniques permutations ω^b et ω_t de $B(p, q)$ qui envoient respectivement les séquences $\boldsymbol{i'i''}$ et $\boldsymbol{j'j''}$ sur $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$. On associe alors à $\mathcal{D}$ la matrice dont le seul coefficient non nul se trouve sur la ligne indexée par ω_t et sur la colonne indexée par ω^b. La valeur du coefficient est $\mathcal{D}' \otimes \mathcal{D}''$, où $\mathcal{D}' \in R(\nu')$ et $\mathcal{D}'' \in R(\nu'')$ sont obtenus à partir de $\mathcal{D}$ en "effaçant" respectivement les brins indexés par des sommets de ν'', puis ceux indexés par des sommets de ν'.

Commençons par vérifier que l'on définit bien un morphisme d'anneau φ. Plaçons-nous sur $\widetilde{R}(\nu)$. La définition précédente définit un morphisme de groupe car elle est cohérente avec l'isotopie : si deux diagrammes sont isotopes, ils le sont encore quand on "efface" des brins. En prenant deux diagrammes, on vérifie que leur concaténation est envoyé sur le produit de leurs images dans l'anneau des matrices. On a donc un morphisme d'anneau. On vérifie pour finir que les relations locales 9.13 - 9.18 sont conservées.

On constuit à présent le morphisme inverse ψ. Soient $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ deux diagrammes de séquences hautes respectives $\boldsymbol{i}'$ et $\boldsymbol{i}''$, de séquences basses $\boldsymbol{j}'$ et $\boldsymbol{j}''$. Soient ω_t et ω^b deux permutations de $B(\nu', \nu'')$. Elles envoient $\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}''$ et $\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}''$ sur deux séquences $\boldsymbol{i}'$ et $\boldsymbol{j}$. On considère alors le diagramme $\mathcal{D}$ dont la séquence basse est $\boldsymbol{i}$, la séquence haute $\boldsymbol{j}$, et dont les brins sont dessinés à partir de ceux de $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$. Il faut expliciter ce que l'on entend par là. Soit $s_{a_1^b} \dots s_{a_r^b}$ une présentation minimale de ω^b, et considérons l'élément $x^b = \delta_{a_r^b}(s_{a_r^b}\, \boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'') \cdots \delta_{a_1^b}(\boldsymbol{i})$ de $R(\nu)$. On déduit d'après le corollaire 8.1.1 que les croisements du diagramme représentant naturellement x^b se font exclusivement entre un brin indexé par ν' et un brin indexé par ν''. D'après les relations 9.11 et 9.17, x^b ne dépend pas donc pas de la représentation minimale de ω^b. La conclusion est la même pour $x^t = \delta_{a_1^t}(s_{a_1^t}\boldsymbol{j}) \cdots \delta_{a_l^t}(\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'')$, où $s_{a_1^t} \dots s_{a_l^t}$ est une présentation minimale de ω_t. Il est clair que cette définition est compatible avec la notion d'isotopie, conduisant à une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire de $\widetilde{R}(\nu') \times \widetilde{R}(\nu'')$ vers $R(\nu)$. Le passage au quotient $R(\nu') \times R(\nu'')$ est tout aussi évident, et l'on obtient finalement un morphisme de groupe de $R(\nu') \otimes_{\mathbb{Z}} R(\nu'')$ vers $R(\nu)$.

L'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbf{A})$, vu comme $\mathbb{Z}$-module, admet une décomposition en somme directe naturelle, où un facteur est l'ensemble des matrices dont un seul coefficient fixé est non nul. Ce qui précède définit le morphisme de groupe ψ sur le facteur correspondant au coefficient dont la ligne est ω_t et la colonne ω^b, et par suite le morphisme ψ entièrement. Voyons qu'il s'agit d'un morphisme d'anneau. Pour cela, il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned}\psi\big((y_1' \otimes y_1''\ E_{\omega_1^t\omega_1^b})\ (y_2' \otimes y_2''\ E_{\omega_2^t\omega_2^b})\big) \\ = \psi\big(y_1' \otimes y_1''\ E_{\omega_1^t\omega_1^b}\big)\ \psi\big(y_2' \otimes y_2''\ E_{\omega_2^t\omega_2^b}\big),\end{aligned} \tag{9.26}$$

où $y_1' \in {}_{\boldsymbol{j}_1'}R(\nu')_{\boldsymbol{i}_1'}$, $y_1'' \in {}_{\boldsymbol{j}_1''}R(\nu'')_{\boldsymbol{i}_1''}$, $y_2' \in {}_{\boldsymbol{j}_2'}R(\nu')_{\boldsymbol{i}_2'}$, $y_2'' \in {}_{\boldsymbol{j}_2''}R(\nu'')_{\boldsymbol{i}_2''}$.

Si $\omega_1^b \neq \omega_2^t$, les deux membres de l'équation sont nuls, par définition du produit matriciel pour le premier, et par définition du produit de $R(\nu)$ pour le second. En effet quelque soit les séquences hautes et basses de y_1', y_2', y_1'', y_2'', on a dans tous les cas $\omega_1^b(\boldsymbol{i}_1'\boldsymbol{i}_1'') \neq \omega_2^t(\boldsymbol{j}_2'\boldsymbol{j}_2'')$. Si maintenant $\omega_1^b = \omega_2^t$, on peut supposer que $\boldsymbol{i}_1' = \boldsymbol{j}_2'$ et $\boldsymbol{i}_1'' = \boldsymbol{j}_2''$, sans quoi, les deux membres de l'équation serait encore nulles, d'après les définitions des produits des anneaux $R(\nu)$, $R(\nu')$ et $R(\nu'')$. La définiton de ψ fournit deux éléments x_1^b et x_2^t dont le produit $x_1^b x_2^t$ fait alors $1(\omega^b \boldsymbol{i}_1'\boldsymbol{i}_1'')$, d'après les relations 9.11, 9.13, 9.18 et d'après un raisonnement similaire à celui qu'on a fait pour monter par exemple le lemme 8.3.2. On a alors l'équation 9.26 ci-dessus.

Il reste à voir que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre. Commençons par montrer que $\varphi \circ \psi = id$. Il suffit pour cela de voir que

$$\varphi \circ \psi\big(y' \otimes y''\ E_{\omega^t \omega^b}\big) = y' \otimes y''\ E_{\omega^t \omega^b}$$

pour tout $y' \in {}_{\boldsymbol{j}'}R(\nu')_{\boldsymbol{i}'}$, $y'' \in {}_{\boldsymbol{j}''}R(\nu'')_{\boldsymbol{i}''}$ et $\omega^t, \omega^b \in B(p,q)$. C'est clair car les éléments x créés par ψ deviennent des diagrammes sans croisements quand φ effacent des brins.
Montrons à présent que $\psi \circ \varphi = id$. Il suffit de le voir sur les générateurs de l'anneau $R(\nu)$. Pour $x_k(\boldsymbol{i})$, les relations 9.14 permettent de remonter le point en haut du diagramme $\psi \circ \varphi(x_k(\boldsymbol{i}))$, puis comme précédemment les relations 9.11, 9.13, 9.18 vont supprimer les croisements qu'a créés ψ. Pour $\delta_k(\boldsymbol{i})$, notons $\boldsymbol{j} = \mathrm{top}(\delta_k(\boldsymbol{i}))$ et $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{j}''$ les séquences basses et hautes des deux diagrammes créés par φ à partir de $\delta_k(\boldsymbol{i})$. Soit ω^b telle que $\omega^b\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'' = \boldsymbol{i}$, ω^t telle que $\omega^t\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'' = \boldsymbol{j}$ et $s_{a_1^b} \dots s_{a_r^b}$, $s_{a_1^t} \dots s_{a_l^t}$ deux présentations minimales respectives.

Quand le croisement de $\delta_k(\boldsymbol{i})$ se fait entre deux brins de ν', $\omega^t = \omega^b$ et il faut alors montrer que dans $R(\nu)$

$$\delta_{a_1^t}(s_{a_1^t}\boldsymbol{j}) \cdots \delta_{a_l^t}(\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'')\ \delta_{k'}(\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'')\ \delta_{a_r^b}(s_{a_r^b}\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'') \cdots \delta_{a_1^b}(\boldsymbol{i}) = \delta_k(\boldsymbol{i}), \qquad (9.27)$$

où $\delta_{k'}(\boldsymbol{i}') = \varphi(\delta_k(\boldsymbol{i}))$. Pour cela, on utilise une nouvelle fois un raisonnement similaire à celui fait avant le lemme 8.3.2, en remarquant qu'à chaque étape de réduction tous les croisements, excepté un, se font entre un brin indexé par ν' et un brin indexé par ν'' (on a alors la relation

9.17), et en remarquant de plus que la réduction s'opère sur un double croisement entre deux brins indexés par ν'. Quand le croisement de $\delta_k(\boldsymbol{i})$ se fait entre deux brins indexés par ν'', le même raisonnement montre que $\psi \circ \varphi(\delta_k(\boldsymbol{i})) = \delta_k(\boldsymbol{i})$.

Quand le croisement de $\delta_k(\boldsymbol{i})$ se fait entre un brin indexé par ν' et un brin indexé par ν'', $\omega^b = s_k\omega^t$ et $\varphi(\delta_k(\boldsymbol{i})) = 1(\boldsymbol{i}') \otimes 1(\boldsymbol{i}'')$. Par suite

$$\begin{aligned}&\psi \circ \varphi(\delta_k(\boldsymbol{i}))\\ &\qquad = \delta_{a_1^t}(s_{a_1^t}\,\boldsymbol{j}) \cdots \delta_{a_l^t}(\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'')\ \delta_k(s_k\,\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'')\ \delta_{a_r^b}(s_{a_1}s_k\,\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'') \cdots \delta_{a_1^b}(\boldsymbol{i}). \quad (9.28)\end{aligned}$$

Le même raisonnement encore (toujours valide ici car les diagrammes considérés n'ont que des croisements entre un brin indexé par ν' et un brin indexé par ν'') montre que $\psi \circ \varphi(\delta_k(\boldsymbol{i})) = \delta_k(\boldsymbol{i})$. □

Remarque 9.2.2. Cet exemple est une généralisation du quatrième, et permet également de retrouver le précédent par récurrence. De plus, l'isomorphisme que l'on construit ainsi est exactement celui du cinquième exemple.

Démonstration. On la suite d'isomorphismes canoniques suivante :

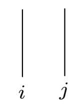
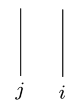
$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_m\big(\mathbb{Z}[x_1] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{(m-1)!}\,(\mathbb{Z}[x_2,\dots,x_m])\,\big)\\ \downarrow\\ \mathfrak{M}_m\big(\mathfrak{M}_{(m-1)!}(\mathbb{Z}[x_2,\dots,x_m])[x_1]\big)\\ \downarrow\\ \mathfrak{M}_m\big(\mathfrak{M}_{(m-1)!}(\mathbb{Z}[x_2,\dots,x_m][x_1])\big)\\ \downarrow\\ \mathfrak{M}_m\big(\mathfrak{M}_{(m-1)!}(\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_m])\big)\\ \downarrow\\ \mathfrak{M}_{m!}\big(\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_m]\big)\end{gathered}$$

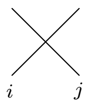
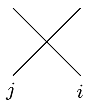
Par récurrence et en regardant l'image d'un diagramme par la suite précédente de morphismes, on retrouve bien le morphisme décrit dans le cinquième exemple. L'ordre total sous-jacent sur les séquences de $i_1+\cdots+i_m$ est donné à chaque étape de la récurrence par le dernier morphisme de la suite ci-dessus. □

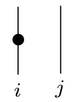
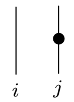
7) $\nu = i + j$ avec $i \cdot j = -1$. $Seq(i+j) = \{ij, ji\}$. On note $\mathbf{A}$ l'anneau $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$.

Proposition 9.2.5. *$R(\nu)$ est isomorphe au sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbf{A})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$, dont le coefficient en bas à gauche est divisible par $x_1 + x_2$.*

Démonstration. L'isomorphisme est donné sur les générateurs par :

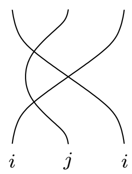
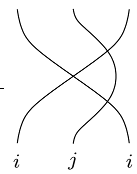
 $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

 $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1 + x_2 & 0 \end{pmatrix}$  $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

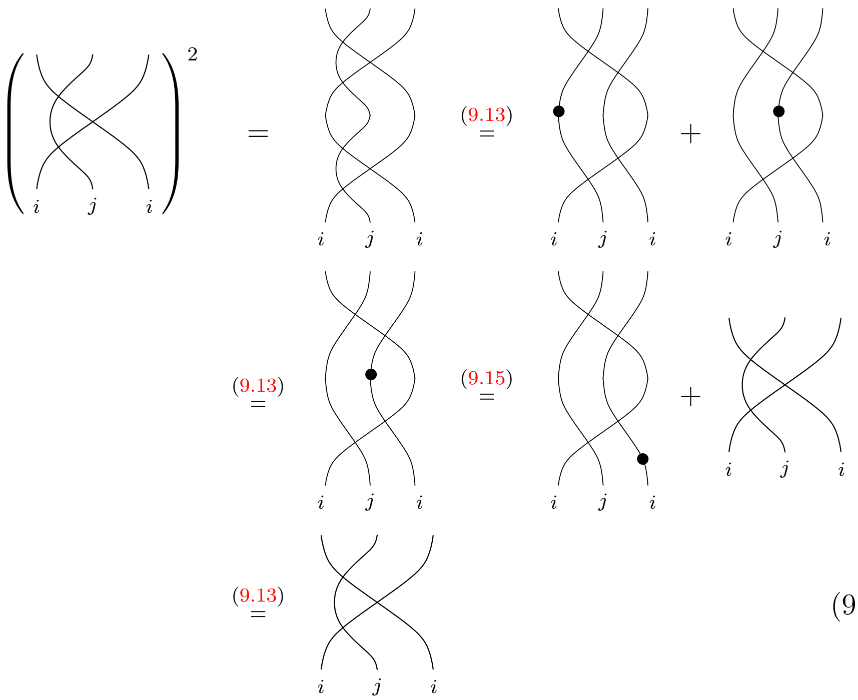
 $\leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  $\leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La preuve de ce fait est similaire à celle de l'exemple 4, 5 ou 6. Il faut juste prendre garde au terme en bas à gauche. □

Remarque 9.2.3. Si $i \cdot j = -1$ alors les éléments

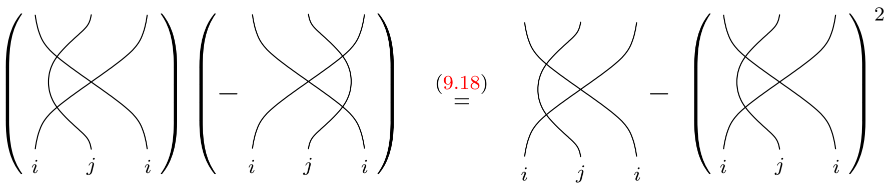
 et $-$  (9.29)

idempotents et orthogonaux dans $R(2i+j)$, par exemple :



$$(9.30)$$

On montre de la même façon que l'autre élément est idempotent. Quant à l'orthoganilité :



$$\overset{(9.30)}{=} \quad 0 \tag{9.31}$$

On peut voir l'équation (9.18) comme la décomposition de l'élément idempotent 1_{iji} en la somme de deux éléments idempotents orthogonaux. L'équation (9.17), quant à elle, autorise les intersections triples pour certains ijk.

9.3 Propriétés

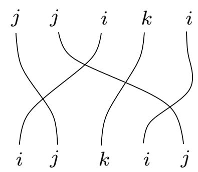
Nous allons définir une représentation graduée de l'algèbre $R(\nu)$, de telle sorte que celle-ci soit fidèle et dans le but de déterminer une base du $\Bbbk$-module $R(\nu)$.
Supposons à présent que le graphe Γ soit orienté et définissons une action sur la $\Bbbk$-algèbre libre

$$\mathcal{P}o\ell_\nu = \bigoplus_{\boldsymbol{i}\in \mathrm{Seq}(\nu)} \mathcal{P}o\ell_{\boldsymbol{i}}, \qquad \mathcal{P}o\ell_{\boldsymbol{i}} = \Bbbk[y_1(\boldsymbol{i}), y_2(\boldsymbol{i}), \ldots, y_m(\boldsymbol{i})], \qquad m = |\nu|.$$

Le groupe symétrique S_m agit par $\Bbbk$-endomorphisme sur $\mathcal{P}o\ell_\nu$ en envoyant $y_a(\boldsymbol{i})$ sur $y_{\omega(a)}(\omega.\boldsymbol{i})$, pour $\omega \in S_m$. On se référera à l'article [17, section 2.3] pour la définition de l'action de $R(\nu)$ sur $\mathcal{P}o\ell_\nu$.

Définition 9.3.1. Soient $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu)$. On note ${}_{\boldsymbol{j}}1_{\boldsymbol{i}}$ l'unique diagramme de $R(\nu)$ tel que $\mathrm{bot}({}_{\boldsymbol{j}}1_{\boldsymbol{i}}) = \boldsymbol{i}$, $\mathrm{top}({}_{\boldsymbol{j}}1_{\boldsymbol{i}}) = \boldsymbol{j}$ et dont le nombre de croisements est minimal.

Exemple 9.3.1.

${}_{jjiki}1_{ijkij} \quad =$ 

Proposition 9.3.1. L'action définie précédemment fait de $\mathcal{P}o\ell_\nu$ un $R(\nu)$-module. Choisir une séquence $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et placer $1 \in \mathcal{P}o\ell_{\boldsymbol{i}}$ en degré nul détermine une unique graduation sur $\mathcal{P}o\ell_\nu$.

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathcal{P}o\ell_\nu$ est un $R(\nu)$-module. Il s'agit donc de prouver que l'on a un morphisme de $\Bbbk$-algèbre de $R(\nu)$ dans $End_{\Bbbk}(\mathcal{P}o\ell_\nu)$. D'après 9.1.3, il faut alors voir que les $\Bbbk$-endomorphismes de $\mathcal{P}o\ell_\nu$ définies par l'action vérifient les relations citées dans le théorème. $\mathcal{P}o\ell_\nu$ étant leur somme directe, il suffit de vérifier sur chaque $\mathcal{P}o\ell_{\boldsymbol{i}}$ ces égalités. L'article [17, proposition 2.3] démontrent les moins évidentes. Quant à la graduation, on démontre l'unicité en utilisant les éléments ${}_{\boldsymbol{j}}1_{\boldsymbol{i}}$ définis précédemment, l'existence en vérifiant que les générateurs de $R(\nu)$ agissent comme des $\Bbbk$-endomorphismes homogènes pour cette unique graduation possible. $\square$

Remarque 9.3.1. En utilisant les relations locales, on voit que tout élément de $R(\nu)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de diagrammes dont chaque couple de brins s'intersectent au plus une fois et dont tous les points se trouvent en bas, i.e. en-dessous des croisements.
Un tel diagramme $\mathcal{D}$ est déterminé par une présentation minimale d'une permutation $\omega \in S_m$ et le nombre de points sur chaque brin. D'après la proposition 8.1.2 et les relations 9.17 et 9.18, on voit que la différence de deux diagrammes déterminés par les mêmes données, excepté deux présentations minimales différentes de la permutation, est une combinaison linéaire de diagrammes avec strictement moins de croisements.
Toujours d'après la proposition 8.1.2 et les relations 9.17 et 9.18, on note que deux présentations minimales d'une même permutation déterminent deux diagrammes de même degré. On peut également montrer ce fait, en remarquant que si deux brins i et j sont à des abscisses inversées par une permutation ω, alors quelle que soit la présentation minimale de ω, le diagramme qu'elle définit contient exactement un croisement entre i et j. Si au contraire les deux abscisses ne sont pas inversées, alors toute présentation minimale définit un diagramme où les brins i et j ne se croisent pas. Le corollaire 8.1.1 apporte les justifications nécéssaires à cette discussion.

On renvoie à l'article [17, section 2.3] pour la définition des familles homogènes ${}_{\boldsymbol{j}}B_{\boldsymbol{i}}$ des $\Bbbk$-modules gradués ${}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}$. On choisit à présent un ordre total sur l'ensemble I des sommets du graphe Γ et on oriente Γ de telle sorte que pour chaque arrête $i \longrightarrow j$, on ait $i < j$.

Théorème 9.3.1. ${}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ est un $\Bbbk$-module gradué libre, de base homogène ${}_{\boldsymbol{j}}B_{\boldsymbol{i}}$.

Démonstration. Voir l'article [17, proposition 2.3]. □

Corollaire 9.3.1. $\mathcal{P}o\ell_\nu$ est un $R(\nu)$-module gradué fidèle (pour l'orientation définie précédemment).

Démonstration. Ce résultat est contenu dans la démonstration précédente. □

Lemme 9.3.1. Soient $\nu_1, \ldots, \nu_r$ des éléments de $\mathbb{N}[I]$ et $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_r$ leur somme. Le morphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée, défini dans le lemme 9.1.1,

$$R(\nu_1) \otimes_\Bbbk \cdots \otimes_\Bbbk R(\nu_r) \longrightarrow R(\nu)$$

est injectif

Démonstration. On remarque que la base de $R(\nu_1) \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} R(\nu_r)$ fournie par le théorème précédent est envoyée sur une famille libre, toujours d'après ce théorème. □

Le théorème précédent montre que, pour chaque $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$, la sous-$\Bbbk$-algèbre homogène ${}_{\boldsymbol{i}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ contient l'algèbre de polynômes

$$\mathcal{P}o\ell(\nu, \boldsymbol{i}) \cong \mathbb{Z}[x_1(\boldsymbol{i}), x_2(\boldsymbol{i}), \ldots, x_m(\boldsymbol{i})],$$

où $m = |\nu|$. On note leur produit direct (fini)

$$\mathcal{P}o\ell(\nu) = \prod_{\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)} \mathcal{P}o\ell(\nu, \boldsymbol{i}).$$

Proposition 9.3.2. $R(\nu)$ est un $\mathcal{P}o\ell(\nu)$-module à gauche et à droite libre de rang $m!$, où l'action est définie en considérant $\mathcal{P}o\ell(\nu)$ comme une sous-$\Bbbk$-algèbre de $R(\nu)$.

Démonstration. Voir l'article [17, proposition 2.7]. □

Remarque 9.3.2. Notons qu'on considère $R(\nu)$ comme un $\mathcal{P}o\ell(\nu)$-module sans graduation. En effet la base que l'on construit dans la preuve n'est pas homogène en général.

L'action de S_m induit une action sur $\mathcal{P}o\ell(\nu)$. On note alors $\mathrm{Sym}(\nu) = \mathcal{P}o\ell(\nu)^{S_m}$ la sous-$\Bbbk$-algèbre homogène de $\mathcal{P}o\ell(\nu)$ invariante sous l'action de S_m. On a l'isomorphisme de $\Bbbk$-algèbre graduée

$$\mathrm{Sym}(\nu) \cong \bigotimes_{i \in \mathrm{Supp}(\nu)} \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{\nu_i}]^{S_{\nu_i}},$$

où le produit tensoriel est pris sur $\Bbbk$.

Lemme 9.3.2. Les inclusions de $\Bbbk$-algèbres graduées $\mathrm{Sym}(\nu) \subseteq \mathcal{P}o\ell(\nu) \subseteq R(\nu)$ font de $\mathcal{P}o\ell(\nu)$ un $\mathrm{Sym}(\nu)$-module gradué libre de rang $m!$ et de $R(\nu)$ un $\mathrm{Sym}(\nu)$-module gradué libre de rang $(m!)^2$.

Démonstration. Il suffit de démontrer la première assertion, conséquence du théorème 2.3.2. On en déduit que $R(\nu)$ un $\mathrm{Sym}(\nu)$-module libre de rang $(m!)^2$, et en observant la base obtenue on remarque que celle-ci est homogène. □

Théorème 9.3.2. $\mathrm{Sym}(\nu)$ est le centre de $R(\nu)$.

Démonstration. Voir l'article [17, Théorème 2.9]. $\square$

Voici deux propriétés liés aux anneaux $R(\nu)$ énoncées dans l'article sans démonstration :

Corollaire 9.3.2. On considère ici $R(\nu)$ sans sa graduation.

1) $R(\nu)$, est une algèbre noethérienne à gauche et à droite.

2) $R(\nu)$ est indécomposable.

Démonstration. 1) $\mathcal{P}o\ell(\nu)$ (sans sa graduation) est une $\Bbbk$-algèbre engendrée par un nombre fini d'élément en tant qu'algèbre. $\mathbb{Z}$ et tout corps étant noethérien, le théorème de transfert d'Hilbert nous dit que $\mathcal{P}o\ell(\nu)$ l'est aussi. $R(\nu)$ étant un $\mathcal{P}o\ell(\nu)$-module de type fini, il est noethérien en tant que $\mathcal{P}o\ell(\nu)$-module, et donc en particulier en tant que $R(\nu)$-module à gauche et à droite.
2) D'après l'iso. de produit tensoriel avec $\mathrm{Sym}(\nu)$, on voit que 0 et 1 sont les seuls idempotents centraux de $R(\nu)$, ce qui permet de conclure d'après la proposition 3.7.1. $\square$

On note, en particulier, $R(\nu)$ considéré avec sa graduation, que le corollaire précédent reste vrai.

10 Les catégories de modules sur $R(\nu)$

10.1 Conventions

A partir de maintenant $\mathbb{k}$ désignera un corps.
Nous allons dans cette section nous intéresser à $R(\nu)-$mod la catégorie des $R(\nu)$-modules à gauche gradués de type fini, $R(\nu)-$pmod la catégorie des $R(\nu)$-modules à gauche gradués projectifs de type fini et $R(\nu)-$fmod la catégorie des $R(\nu)$-modules à gauche gradués finis (de dimension finie sur $\mathbb{k}$). On rappelle que la graduation se fait sur $\mathbb{Z}$.
Un $R(\nu)$-module irréductible désignera un $R(\nu)$-module à gauche gradué de type fini irréductible, ou encore un objet irréductible de la catégorie abélienne $R(\nu)-$mod.
Hom, HOM, End et END seront utilisés à la place de $\mathrm{Hom}_{R(\nu)}$, $\mathrm{HOM}_{R(\nu)}$, $\mathrm{End}_{R(\nu)}$ et $\mathrm{END}_{R(\nu)}$.

10.2 Premiers résultats

Lemme 10.2.1. Les objets de $R(\nu)-$mod sont des $\mathrm{Sym}(\nu)$-modules à gauche gradués de type fini. De plus leur graduation est minorée (les espaces homogènes sont nuls pour a suffisamment petits) et leurs espaces homogènes sont de dimension finie.

Démonstration. On sait que $R(\nu)$ est un $\mathrm{Sym}(\nu)$-module à gauche gradué de type fini. La première affirmation en découle. $\mathrm{Sym}(\nu)$ étant $\mathbb{Z}_+$-gradué, on obtient la deuxième affirmation. Pour la dernière, il suffit de remarquer que les espaces homogènes de $\mathrm{Sym}(\nu)$ sont de dimension finie (voir iso avec produit tensoriel) et que les modules considérés sont de type fini sur $\mathrm{Sym}(\nu)$. □

Lemme 10.2.2. Les modules de $R(\nu)-$mod sont noethériens.

Démonstration. $R(\nu)$ est noethérien à gauche d'après le corollaire 9.3.2, tout module de $R(\nu)-$mod étant de type fini, on conclut d'après le corollaire 3.5.1. □

Remarque 10.2.1. En fait le corollaire 9.3.2 permet de montrer que, considéré sans leur graduation, les modules de $R(\nu)-$mod sont noethériens.

On remarque au passage que cela prouve que les espaces homogènes de $R(\nu)$ sont eux aussi de dimension finie.

Un résultat de l'article :

Proposition 10.2.1. Un $R(\nu)$-module irréductible S est fini et $\mathrm{Sym}^+(\nu)$ agit par 0 dessus. $\mathrm{Hom}(S, S\{a\}) = 0$ si $a \neq 0$, et S reste irréductible, considéré comme module sans sa graduation.

Démonstration. Les auteurs de l'article ont éludé cette démonstration. La voici.
Commeçons par montrer que $\mathrm{Hom}(S, S\{a\}) = 0$ si $a \neq 0$. S et $S\{a\}$ sont tous deux irréductibles, donc, par le lemme de Schur 3.5.1, en supposant $\mathrm{Hom}(S, S\{a\}) \neq 0$ il existerait une bijection d'espaces vectoriels gradués entre S et $S\{a\}$, ce qui est impossible car la graduation de S est minorée.
$\mathrm{Sym}(\nu)$ étant le centre de $R(\nu)$, chaque élément homogène x définit un élément de $\mathrm{Hom}(S, S\{a\})$, où a est le degré de x. Considérons alors un élément homogène de $\mathrm{Sym}^+(\nu)$, a est alors non nul et d'après ce qui précède, l'action de x est nulle.
Soit $x \neq 0$ un élément homogène de S. Alors $S = R(\nu).x$. Soit $(y_1, \cdots, y_{m!^2})$ une base du $\mathrm{Sym}(\nu)$-module à gauche $R(\nu)$. Ce qui précède montre alors que S est égal à l'espace vectoriel engendré par $(y_1.x, \cdots, y_{m!^2}.x)$, ce qui montre que S est de dimension finie.
Prouvons que S, considéré sans sa graduation, reste irréductible. Soit S_1 un sous-module (pas forcément gradué) non nul de S. La graduation de S étant minorée, on peut considérer $x \neq 0$ tel que $\max\{\mathrm{a} \ / \ \mathrm{x_a} \neq 0\}$ soit minimal. Supposons que x ne soit pas homogène, et soit a le maximum de x évoqué juste avant. Alors il existe un esapce homogène non nul de degré strictement inférieur à a. Or $R(\nu).x_a = S$, donc il existe $y \in R(\nu)$ homogène de degré strictement négatif tel que $y.x_a \neq 0$, mais $y.x$ contredit alors la minimalité de x. Par suite x est homogène et $S_1 = S$. □

Un autre résultat important de l'article :

Proposition 10.2.2. Un $R(\nu)$-module irréductible S est un $R'(\nu)$-module à gauche gradué, où

$$R'(\nu) = R(\nu)/\mathrm{Sym}^+(\nu)R(\nu). \tag{10.1}$$

$\dim_{\Bbbk} R'(\nu) = (m!)^2$ et modulo isomorphisme et décalage de graduation, il existe un nombre fini de $R(\nu)$-modules irréductibles.

Démonstration. La démonstration est de nouveau omise dans l'article.
$\mathrm{Sym}^+(\nu)$ étant inclus dans le centre de $R(\nu)$, on note que $\mathrm{Sym}^+(\nu)R(\nu)$ est bien un idéal bilatère de $R(\nu)$ (en oubliant la graduation).
Soit S un $R(\nu)$-module irréductible. La preuve de la proposition précédente a montré que S était un $R'(\nu)$-module à gauche. $\mathrm{Sym}^+(\nu)$ étant un idéal gradué de $\mathrm{Sym}(\nu)$, il est engendré en tant qu'idéal de $\mathrm{Sym}(\nu)$ (en oubliant la graduation) par des éléments homogènes. Ainsi $\mathrm{Sym}^+(\nu)R(\nu)$ un idéal bilatère de $R(\nu)$ (sans la graduation) engendré par des éléments homogènes, ce qui fait de $R'(\nu)$ une algèbre graduée et de S un $R'(\nu)$-module à gauche gradué.
On montre que $\dim_{\Bbbk} R'(\nu) = (m!)^2$ en considérant une base de $R(\nu)$ sur $\mathrm{Sym}(\nu)$.
La proposition 3.5.3 et la remarque 3.5.1 prouvent alors la dernière affirmation. $\square$

On peut noter qu'il était possible d'utiliser le résultat de la proposition 10.2.1 affirmant que S reste irréductible, considéré comme module sans sa graduation. En effet, la théorie des modules classique (sans graduation) montre, de la même manière que nous l'avons fait dans le cas d'une graduation, qu'il existe un nombre fini, à isomorphisme de $R(\nu)$-module (sans graduation) près, de $R(\nu)$-modules irréductibles. Ainsi, en considérant le lemme 3.2.2 et le lemme de Schur 3.5.1, on obtient de nouveau le résultat de la proposition précédente.

10.3 Les groupes de Grothendieck $G_0(R(\nu))$ et $K_0(R(\nu))$

Définition 10.3.1. On note respectivement $G_0(R(\nu))$ et $K_0(R(\nu))$ les groupes de Grothendieck G_0 de $R(\nu)-$fmod et $R(\nu)-$pmod.

Remarque 10.3.1. D'après la proposition 4.4.3, $R(\nu)-$pmod est semi-simple et d'après son corollaire 4.4.1, il est alors inutile de faire une distinction entre les groupes de Grothendieck G_0 et G de $R(\nu)-$pmod.

D'après la proposition 10.2.2, il existe un nombre fini $R(\nu)$-modules irréductibles (fini), à isomorphisme et décalage de graduation près. On note alors $\mathbf{B}'_\nu$ un ensemble fini et pour chaque b on choisit S_b, de tel sorte que $([S_b\{a\}])^{a\in\mathbb{Z}}_{b\in\mathbf{B}'_\nu}$ soit la famille complète et sans répétition des classes d'isomorphisme de $R(\nu)$-modules irréductibles (le fait qu'il n'y est pas de répétition provient encore de la proposition 10.2.2 : $\mathrm{Hom}(S_b, S_b\{a\}) = 0$ pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbf{B}'_\nu$)).

Proposition 10.3.1. $G_0(R(\nu))$ est un $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-module libre de base $([S_b])_{b\in\mathbf{B}'_\nu}$.

Démonstration. En considérant le morphisme de groupe $q.[M] = [M\{1\}]$, défini sur le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes (gradués) des $R(\nu)$-modules finis, on remarque qu'il passe au quotient $G_0(R(\nu))$. Cela définit donc une action de l'algèbre libre $\mathbb{Z}[q]$ sur $G_0(R(\nu))$. Il est de même possible de définir le morphisme de groupe inverse sur $G_0(R(\nu))$, qui à $[M]$ associe $[M\{-1\}]$, ainsi l'action se factorise à travers le localisé $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$, faisant de $G_0(R(\nu))$ un $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-module. $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ étant canoniquement un $\mathbb{Z}$-module libre de base $(q^a)_{a\in\mathbb{Z}}$, la remarque 3.5.1, la proposition 3.6.1, le théorème 3.6.1 ainsi que les propositions 4.4.1 et 4.3.4 permettent de conclure. □

Proposition 10.3.2. $R(\nu)-$pmod a la propriété de Krull-Schmidt.

Démonstration. Immédiat d'après les lemmes 10.2.1 et 10.2.2, et le théorème 3.7.4. □

Proposition 10.3.3. Tout module irréductible admet une unique (à isomorphisme près) enveloppe projective indécomposable, on note alors P_b cellle de S_b. De plus, pour $b_1 \neq b_2$, P_{b_1} et P_{b_2} ne sont pas isomorphes, même à décalage de graduation près.

Démonstration. Nous allons admettre l'existence d'une enveloppe projective d'un irréductible. Soient $(P, p$ et (Q, q) deux enveloppes projectives indécomposables de S irréductible. Alors d'après le lemme 3.9.1 il existe $h : P\ toQ$ surjectif. Q s'identifie donc à un quotient de P, le lemme 3.4.1 montre alors que Q est un facteur direct de P. P étant indécomposable, $P \cong Q$.
D'après 10.3.2, P admet une décomposition en indécomposables dans $R(\nu)-$pmod. Le lemme 3.9.2 fournit alors la première assertion. D'après la définition des modules S_b, et le corollaire 3.9.1, on obtient la seconde. □

Remarque 10.3.2. Si $\mathbf{A}$ est une algèbre (sans graduation) noethérienne et artinienne à gauche, un résultat de la théorie des modules sans graduation affirme que tout $\mathbf{A}$-module simple de type fini admet une enveloppe projective. On a vu que dans le cadre des graduations on pouvait remplacer l'hypothèse artinienne par l'hypothèse que les espaces homogènes de l'algèbre soit de dimension finie, dans la mesure où le théorème de Krull-Schmidt restait alors valable. On peut donc espérer qu'il en soit de même pour l'existence d'une enveloppe projective, ce qui fournirait une éventuelle démonstration du premier point de la proposition, $R(\nu)$ étant noethérienne à gauche et ses espaces homogènes de dimension finie.

Proposition 10.3.4. $([P_b\{a\}])_{b\in\mathbf{B}'_\nu}^{a\in\mathbb{Z}}$ est la famille complète et sans répétition des classes d'isomorphisme des modules indécomposables de $R(\nu)-$pmod.

Démonstration. Le fait que la famille soit sans répétition est une conséquence de la proposition précédente. Montrons qu'elle est complète.
Soit P un module indécomposable de $R(\nu)-$pmod. Il est en particulier de type fini, donc admet un sous-module maximal d'après le lemme 3.5.4. Le quotient S par ce sous-module est irréductible, notons p la projection correspondante. On sait d'après la proposition précédente que S admet une enveloppe projective (Q, q). On a donc d'après le lemme 3.9.1 un morphisme surjectif $h : P \to Q$ tel que $q \circ h = p$. Comme dans la preuve précédente on montre alors que $P \cong Q$, ou encore que h est bijectif. h conjugue p et q, montrant que (P, p) est une enveloppe projective de S. Or il existe b et a tels que $S \cong S_b\{a\}$, ainsi par unicité de l'enveloppe projective, $P \cong P_b\{a\}$. □

Proposition 10.3.5. $K_0(R(\nu))$ est un $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-module libre de base $([P_b])_{b\in\mathbf{B}'_\nu}$.

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas de $G_0(R(\nu))$, en utilisant la remarque 10.3.1 et les propositions 10.3.2 et 4.3.5 et 10.3.4. □

Lemme 10.3.1. $\mathrm{HOM}(P_b, S_b) = \mathrm{Hom}(P_b, S_b) = \mathrm{End}(S_b)$.

Démonstration. La première égalité est conséquence de le lemme 3.2.2, du fait que $\mathrm{Hom}(S, S\{a\}) = 0$ si $a \neq 0$ (proposition 10.2.1) et du lemme 3.9.
Quant à la seconde, on considère l'application $\Bbbk$-linéaire $\varphi : \mathrm{End}(S_b) \to \mathrm{Hom}(P_b, S_b)$ qui à f associe $f \circ p$, où $p : P_b \to S_b$. La surjectivité de p implique l'injectivité de φ. Soit $g \in \mathrm{Hom}(P_b, S_b)$. Si $g = 0$, il admet clairement un antécédent par φ. Sinon, il est surjectif (S_b étant irréductible) et en reprenant la deuxième partie de la preuve de la proposition 10.3.4, on voit que (P_b, g) est une enveloppe projective de S_b. D'après la proposition 3.9.3, les noyaux de p et g coïncident, donc g passe au quotient S_b, i.e. il existe f endomorphisme de S_b tel que $g = f \circ p$. En d'autres termes, φ est également surjective. □

ψ désigne ici l'anti-involution de $R(\nu)$ définie dans la partie précédente. Pour $P \in R(\nu)-$pmod, on note $\overline{P} = \mathrm{HOM}(P, R(\nu))^\psi$.

Proposition 10.3.6. $\bar{\ }$ défini un foncteur contravariant d'équivalence $R(\nu)-$pmod dans lui-même. $\overline{P_{\boldsymbol{i}}} \cong P_{\boldsymbol{i}}$ pour chaque $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$, et plus généralement, $\overline{P_{\boldsymbol{i}}\{a\}} \cong P_{\boldsymbol{i}}\{-a\}$.
Ce foncteur d'équivalence induit une involution anti-$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-linéaire de $K_0(R(\nu))$, que l'on note également $\bar{\ }$.

Démonstration. La première assertion est la proposition 4.4.7 appliquée à $R(\nu)$.
Soit $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$, on va construire l'isomorphisme entre $\overline{P_{\boldsymbol{i}}}$ et $P_{\boldsymbol{i}}$ de la même façon qu'est construit l'isomorphisme entre $Du(\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}$ (cf. proposition 4.4.6). A $x \in P_{\boldsymbol{i}}$ on associe le morphisme de module $y \mapsto yDu(x)$. Par ailleurs, à $f \in \mathrm{HOM}(P_{\boldsymbol{i}}, R(\nu))$ on associe $(Du \circ f)(1(\boldsymbol{i}))$. Ces deux applications sont des morphismes de modules gradués entre $\overline{P_{\boldsymbol{i}}}$ et $P_{\boldsymbol{i}}$, inverses l'un de l'autre. De façon générale il avait été remarqué (cf. proposition 4.4.6) que $Du(M\{g\}) \cong Du(M)\{-g\}$, donc $\overline{P_{\boldsymbol{i}}\{a\}} \cong P_{\boldsymbol{i}}\{-a\}$.
$\bar{\ }$ est additif donc défini un endomorphisme involutif de groupe de $K_0(R(\nu))$. $\bar{(}M\{g\}) \cong \bar{(}M)\{-g\}$ implique qu'il soit $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-antilinéaire. $\square$

Proposition 10.3.7. Le couplage $(\cdot, \cdot)$ défini par

$$\begin{aligned} K_0(R(\nu)) \times G_0(R(\nu)) &\longrightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}] &(10.2)\\ ([P], [M]) &\longmapsto \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(P^{\psi} \otimes_{R(\nu)} M) &(10.3)\end{aligned}$$

est bien défini et $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-bilinéaire.

Démonstration. $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(P^{\psi} \otimes_{R(\nu)} M)$ est bien défini dans $\mathbb{Z}[[q, q^{-1}]]$ car $R(\nu)$ est de graduation minorée, ses espaces homogènes de dimension finie et il en est donc de même pour tout module gradué de type fini sur $R(\nu)$, en particulier pour P^{ψ} et M, et par définition du produit tensoriel gradué, pour $P^{\psi} \otimes_{R(\nu)} M$. Mieux, le fait que M soit fini (donc de minoration bornée) implique qu'il en est de même de $P^{\psi} \otimes_{R(\nu)} M$ d'après le lemme 3.2.5, ainsi $\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(P^{\psi} \otimes_{R(\nu)} M) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.
La proposition 4.4.4 et le fait que le foncteur $\cdot \otimes_{R(\nu)} M$ soit additif montre l'application passe au quotient $K_0(R(\nu))$ d'un côté. La proposition 4.4.10 (et la proposition 4.4.4 qui montre en particulier que P^{ψ} est projectif) montre le passage au quotient $G_0(R(\nu))$ de l'autre côté. La bilinéarité est claire d'après le lemme 3.2.4. $\square$

Proposition 10.3.8. Supposons $\Bbbk$ algébriquement clos. Alors, quitte à permuter les éléments de la première et décaler leurs graduations, les bases $([S_b])_b$ et $([P_b]_b$ sont duales pour le couplage $(\cdot, \cdot)$, qui est donc parfait.

Démonstration. D'après la proposition 3.2.1 et la remarque qui l'accompagne, on a $(P^\psi \otimes_{R(\nu)} M)^* \cong \mathrm{HOM}_{R(\nu)}(P^\psi, M^*)$ en tant que $\Bbbk$-espaces vectoriels gradués. Par ailleurs la graduation de $P^\psi \otimes_{R(\nu)} M$ étant bornée et les espaces homogènes de dimension finie, on a $\mathrm{gdim}_\Bbbk((P^\psi \otimes_{R(\nu)} M)^*) = \left[\mathrm{gdim}_\Bbbk(P^\psi \otimes_{R(\nu)} M)\right](q^{-1})$. D'après le lemme 4.4.3, on a donc $\mathrm{gdim}_\Bbbk(\mathrm{HOM}(P,(M^*)^\psi)) = \left[\mathrm{gdim}_\Bbbk(P^\psi \otimes_{R(\nu)} M)\right](q^{-1})$. Les propositions 4.4.8 et 4.4.4 affirment en particulier que le foncteur $\Psi \circ \star$ réalise une permutation des classes d'isomorphie des $R(\nu)$-modules irréductibles (en effet ce foncteur est un foncteur d'équivalence). D'après le lemme 3.5.2 et le lemme 10.3.1, $\mathrm{gdim}_\Bbbk(\mathrm{HOM}(P_b, S_b)) = 1$. Ces arguments mis bout à bout prouvent la proposition. □

Proposition 10.3.9. Le couplage $(\cdot,\cdot)$ défini par

$$\begin{aligned} K_0(R(\nu)) \times K_0(R(\nu)) &\longrightarrow \mathbb{Z}[[q,q^{-1}]] && (10.4)\\ ([P],[Q]) &\longmapsto \mathrm{gdim}_\Bbbk(P^\psi \otimes_{R(\nu)} Q) && (10.5)\end{aligned}$$

est bien défini, $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-bilinéaire et symétrique.

Démonstration. Il suffit de reprendre certains arguments de la démonstration précédente. La symétrie, quant à elle, est une conséquence du lemme 4.4.4. □

Remarque 10.3.3. Signalons une erreur de raisonnement à ce niveau dans l'article [17, p. 27]. Les auteurs affirment que le couplage défini dans la proposition précédente est à valeur dans $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]\,(\nu)_q$, où

$$(\nu)_q = \mathrm{gdim}_\Bbbk\big(\mathrm{Sym}(\nu)\big) = \prod_{i\in\Gamma}\left(\prod_{a=1}^{\nu_i}\frac{1}{1-q^{2a}}\right)$$

Analysons la preuve, proposée par les auteurs, de ce résultat. Celle-ci, apparemment, est basée sur le fait que tout module projectif serait somme directe de modules $P_{\boldsymbol{i}}$ avec $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$. Dans la théorie classique des modules, on sait que (voir [22, section 6.3]) sur une algèbre artinienne et noethérienne, tout module projectif est isomorphe à une somme directe de modules projectifs indécomposables principaux (principal signifie ici un module projectif indécomposable qui intervient dans la décomposition de l'algèbre, considérée comme un module projectif sur elle-même). Comme pour le théorème de Krull-Schmidt et comme expliquée dans la remarque 10.3.2, il est plausible que ce résultat reste valable pour les modules gradués sur $R(\nu)$. Ainsi, en supposant que les $P_{\boldsymbol{i}}$ soient indécomposables, la décomposition en somme directe de $R(\nu)$ selon ces derniers montrerait, comme annoncé, que tout module projectif serait somme directe de modules $P_{\boldsymbol{i}}\{a\}$. Il est très probable que les auteurs ait raisonné de cette manière, puisqu'ils écrivent p.35 de l'article : "Restriction, in the case of these inclusions, also takes projectives to projectives, by Proposition 2.19 and the Krull-Shmidt property". Toutefois, le raisonnement n'est pas valable puisque les modules $P_{\boldsymbol{i}}$ ne sont en général pas indécomposables, comme le montre l'exemple 10.4.1. Il est en fait même inutile d'espérer que tout module projectif se décompose en une somme directe de modules $P_{\boldsymbol{i}}\{a\}$, toujours d'après le même exemple : pour $\nu = 2i$, le seul $P_{\boldsymbol{i}}$ possible est P_{ii} et si $P_{i^{(2)}}$ était une somme directe de modules $P_{\boldsymbol{i}}\{a\}$, on aboutirait à une contradiction en consisérant les dimensions graduées. Cette discussion bien sûr ne montre pas que le résultat ci-dessus sur le couplage soit faux en général. Il est en fait vrai et on le voit directement sur les algèbres ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ (que, pour rappel, l'on va catégorifier à l'aide des $K_0(R(\nu))$) : voir le lemme 11.3.1.

Définition 10.3.2. Soit $M \in R(\nu)-\text{mod}$. On note $\text{ch}(M)$ l'élément du $\mathbb{Z}[[q, q^{-1}]]$-module libre de base $\text{Seq}(\nu)$:

$$\text{ch}(M) = \sum_{\boldsymbol{i} \in \text{Seq}(\nu)} \text{gdim}(1(\boldsymbol{i}).M) \cdot \boldsymbol{i} ,$$

où on rappelle que $1(\boldsymbol{i}).M$ désigne le sous-$\Bbbk$-espace vectoriel gradué de M, défini par les éléments de la forme $1(\boldsymbol{i}).x$, avec $x \in M$.

10.4 Caractères

On note, que quand M est fini, $\text{ch}(M)$ est un élément du $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-module libre de base $\text{Seq}(\nu)$.
On pose $\text{ch}(M, \boldsymbol{i}) = \text{gdim}(1(\boldsymbol{i}).M)$, de telle sorte que

$$\text{ch}(M) = \sum_{\boldsymbol{i} \in \text{Seq}(\nu)} \text{ch}(M, \boldsymbol{i}) \cdot \boldsymbol{i} .$$

Définition 10.4.1. On note $\text{Seqd}(\nu)$ l'ensemble des expressions de la forme $i_1^{(n_1)} i_2^{(n_2)} \dots i_r^{(n_r)}$, où $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ et $\sum_{a=1}^{r} n_a i_a = \nu$.

Exemple 10.4.1.

$$\text{Seqd}(2i + j) = \{iij, iji, jij, i^{(2)}j, ji^{(2)}\}.$$

Définition 10.4.2. Soit $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$. On définit l'idempotent $1(\boldsymbol{i})$ comme le produit tensoriel

$$1(\boldsymbol{i}) = e_{i_1,n_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r,n_r}$$

des éléments idempotents e_{i_j,n_j} des algèbres de nilHecke $R(n_j i_j)$.

Définition 10.4.3. Soit $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$. On note $\boldsymbol{i}! = [n_1]! \dots [n_r]! \in \mathbb{Z}[q]$ et $\widehat{\boldsymbol{i}}$ l'élément de $\mathrm{Seq}(\nu)$ donné en developpant $\boldsymbol{i}$:

$$\widehat{\boldsymbol{i}} = i_1 \dots i_1 i_2 \dots i_2 \dots i_r \dots i_r.$$

Définition 10.4.4. Soit $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$. On pose

$$\mathrm{ch}(M, \boldsymbol{i}) = q^{-\langle \boldsymbol{i} \rangle} \ \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(1(\boldsymbol{i}).M) \ ,$$

$P_{\boldsymbol{i}}$ le $R(\nu)$-module à gauche gradué

$$R(\nu)\psi(1(\boldsymbol{i}))\{-\langle \boldsymbol{i} \rangle\}$$

et ${}_{\boldsymbol{i}}P$ le $R(\nu)$-module à droite gradué

$${}_{\boldsymbol{i}}P = 1(\boldsymbol{i})R(\nu)\{-\langle \boldsymbol{i} \rangle\} \ .$$

Proposition 10.4.1. Soit $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$. On a les isomorphismes suivants :

$$P_{\widehat{\boldsymbol{i}}} \cong P_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{i}!} \quad \text{et} \quad {}_{\widehat{\boldsymbol{i}}}P \cong {}_{\boldsymbol{i}}P^{\boldsymbol{i}!}.$$

Par exemple,

$$P_{ii} \cong P_{i^{(2)}}^{[2]!} = P_{i^{(2)}}^{q+q^{-1}} = P_{i^{(2)}}\{1\} \oplus P_{i^{(2)}}\{-1\}.$$

Ces isomorphisme montre que, pour $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$, $P_{\boldsymbol{i}}$ et ${}_{\boldsymbol{i}}P$ appartiennent à $R(\nu)-\mathrm{pmod}$.

Démonstration. D'après le lemme 9.1.1, on a un morphisme (pas forcément unitaire) de $\Bbbk$-algèbre graduée de $R(n_1 i_1) \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} R(n_r i_r)$ dans $R(\nu)$. On considère le $R(\nu)$-module $\mathrm{Ind}_{R(n_1 i_1)\otimes_{\Bbbk}\cdots\otimes_{\Bbbk} R(n_r i_r)}^{R(\nu)} \big(R(n_1 i_1) \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} R(n_r i_r)\big) \cong P_{\widehat{\boldsymbol{i}}}$ (voir le lemme 3.3.3 plus loin). D'après la proposition 8.3.6, le lemme 3.2.3 et la distributivité du produit tensoriel par rapport à la somme directe, on a $R(n_1 i_1) \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} R(n_r i_r) \cong \big(P_{n_1,i_1} \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} P_{n_r,i_r}\big)^{\boldsymbol{i}!}$ en tant que $R(n_1 i_1) \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} R(n_r i_r)$-modules à gauche gradués. Donc $P_{\widehat{\boldsymbol{i}}} \cong \big(R(\nu) \otimes_{\left[R(n_1 i_1)\otimes_{\Bbbk}\cdots\otimes_{\Bbbk} R(n_r i_r)\right]}$

$\big(P_{n_1,i_1} \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} P_{n_r,i_r})\big)^{\boldsymbol{i}!}$ en tant que $R(\nu)$-modules à gauche gradués. Or encore d'après le lemme 3.3.3, on voit que $R(\nu) \otimes_{\left[R(n_1 i_1)\otimes_{\Bbbk}\cdots\otimes_{\Bbbk} R(n_r i_r)\right]} (P_{n_1,i_1} \otimes_{\Bbbk} \cdots \otimes_{\Bbbk} P_{n_r,i_r}) \cong P_{\boldsymbol{i}}$ en tant que $R(\nu)$-modules à gauche gradués, ce qui nous donne le premier isomorphisme de l'énoncé.
Pour obtenir le second, il suffit d'appliquer l'anti-involution ψ. □

Corollaire 10.4.1. Soit $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$ et $M \in R(\nu)-\mathrm{mod}$. On a l'isomorphisme de $\Bbbk$-espace vectoriel gradué suivant :

$$1(\widehat{\boldsymbol{i}}).M \cong \big(1(\boldsymbol{i}).M\big)^{\boldsymbol{i}!}\{-\langle \boldsymbol{i}\rangle\}.$$

Démonstration. Conséquence du lemme 3.3.1 et de la proposition précédente. □

Corollaire 10.4.2. Soit $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$ et $M \in R(\nu)-\mathrm{mod}$. On a l'égalité des dimensions graduées suivante :

$$\mathrm{gdim}_{\Bbbk}(1(\widehat{\boldsymbol{i}}).M) = q^{-\langle \boldsymbol{i}\rangle}\ \boldsymbol{i}!\ \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(1(\boldsymbol{i}).M), \quad \text{où } \langle \boldsymbol{i}\rangle = \sum_{k=1}^{r} \frac{n_k(n_k-1)}{2},$$

qui s'écrit aussi de la façon suivante :

$$\mathrm{ch}(M, \widehat{\boldsymbol{i}}) = \boldsymbol{i}!\ \mathrm{ch}(M, \boldsymbol{i}).$$

Démonstration. Immédiat. □

Remarque 10.4.1. On remarque que $\mathrm{ch}(M)$ détermine $\mathrm{ch}(M, \boldsymbol{i})$ pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$.

Remarque 10.4.2. Signalons, à ce passage, une erreur dans l'article (sans conséquence toutefois). Les auteurs établissent l'égalité suivante (les égalités et les isomorphismes dont on va discuter ici sont à considérer dans le cadre des $\Bbbk$-espaces vectoriels gradués) pour $M \in R(\nu)-\mathrm{mod}$ et $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$:

$${}_{\boldsymbol{i}}P \otimes_{R(\nu)} M \cong \mathrm{HOM}(P_{\boldsymbol{i}}, M).$$

Toutefois, celle-ci s'avère être fausse en général. Supposons en effet le contraire et considérons le cas où $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $M = R(\nu)$. On a $P_{\boldsymbol{i}} \cong \mathrm{HOM}(R(\nu), P_{\boldsymbol{i}}) = \bigoplus_{\boldsymbol{j}\in\mathrm{Seq}(\nu)} \mathrm{HOM}(P_{\boldsymbol{j}}, P_{\boldsymbol{i}})$ et ${}_{\boldsymbol{i}}P \otimes_{R(\nu)} R(\nu) \cong {}_{\boldsymbol{i}}P$. Or par le biais de ψ, on a un isomorphisme entre $P_{\boldsymbol{i}}$ et ${}_{\boldsymbol{i}}P$. Ainsi, puisque les espaces homogènes de ${}_{\boldsymbol{i}}P$ sont de dimension finie, ce qui précède implique que pour tout $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}$ dans $\mathrm{Seq}(\nu)$, on a $\mathrm{HOM}(P_{\boldsymbol{j}}, P_{\boldsymbol{i}}) = 0$. Or l'élément ${}_{\boldsymbol{j}}1_{\boldsymbol{i}}$ défini dans la partie précédente induit un morphisme de $R(\nu)$-module injectif de $P_{\boldsymbol{j}}$ dans $P_{\boldsymbol{i}}$, donc non nul. On construit alors facilement un contre-exemple.

Etant données deux séquences ou plus dans $\mathrm{Seqd}(\nu)$ qui diffèrent seulement dans quelques groupements de termes, on indique par des points les parties identiques. Par exemple, $\dots ij \dots$ and $\dots ji \dots$ désignent une paire de séquences $\boldsymbol{i}' ij \boldsymbol{i}''$ et $\boldsymbol{i}' ji \boldsymbol{i}''$, où $\boldsymbol{i}'$ et $\boldsymbol{i}''$ sont des séquences quelconques.

Proposition 10.4.2. On a les isomorphismes de $R(\nu)$-modules à droite gradués :

$$\begin{aligned} {}_{\dots ij \dots}P &\cong {}_{\dots, ji \dots}P \quad \text{si } i \cdot j = 0, \\ {}_{\dots iji \dots}P &\cong P_{\dots i^{(2)} j \dots} \oplus P_{\dots j i^{(2)} \dots} \quad \text{si } i \cdot j = -1, \end{aligned}$$

et les isomorphismes de $R(\nu)$-modules à gauche gradués :

$$\begin{aligned} P_{\dots ij \dots} &\cong P_{\dots ji \dots} \quad \text{si } i \cdot j = 0, \\ P_{\dots iji \dots} &\cong P_{\dots i^{(2)} j \dots} \oplus P_{\dots j i^{(2)} \dots} \quad \text{si } i \cdot j = -1. \end{aligned}$$

Démonstration. Voir l'article [17, proposition 2.13]. □

Corollaire 10.4.3. Pour tout M in $R(\nu)-\mathrm{mod}$ on a les isomorphismes de $\Bbbk$-espaces vectoriels suivants :

$$\begin{aligned} 1(\dots ij \dots).M &\cong 1(\dots ji \dots).M \quad \text{si } i \cdot j = 0, \\ 1(\dots iji \dots).M\{1\} &\cong 1(\dots i^{(2)} j \dots).M \oplus 1_{\dots j i^{(2)} \dots} M \quad \text{si } i \cdot j = -1. \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise de nouveau le lemme 3.3.1. □

Corollaire 10.4.4. On a les égalités entre caractères suivantes, pour tout $R(\nu)$-module (à gauche) gradué M de type fini :

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}(M, \dots ij \dots) = \mathrm{ch}(M, \dots, ji \dots) \quad \text{si } i \cdot j = 0, \\ &\mathrm{ch}(M, \dots iji \dots) = \mathrm{ch}(M, \dots i^{(2)} j \dots) + \mathrm{ch}(M, \dots j i^{(2)} \dots) \quad \text{si } i \cdot j = -1, \\ &\mathrm{ch}(M, \dots i^{(a)} i^{(b)} \dots) = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} \mathrm{ch}(M, \dots i^{(a+b)} \dots). \end{aligned}$$

Démonstration. Les deux premières égalités sont immédiates. Pour la dernière, on utilise deux fois le corollaire 10.4.2 :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(M, \dots ii \cdots i \dots) &= [a+b]!\ \mathrm{ch}(M, \dots, i^{(a+b)} \dots) \\ &= [a]!\ [b]!\ \mathrm{ch}(M, \dots, i^{(a)} i^{(b)} \dots). \end{aligned} \qquad (10.6)$$

□

10.5 Induction et restriction

Nous allons considérer ici des opérations de restriction et d'induction (voir la section 4.5) entre les algèbres $R(\nu)$. Plus précisément, soient $\nu, \nu' \in \mathbb{N}[I]$, on note $\iota_{\nu,\nu'} : R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu') \to R(\nu+\nu')$ le morphisme injectif défini dans le lemme 9.3.1. On note $1_{\nu,\nu'}$ l'image de l'élément neutre par $\iota_{\nu,\nu'}$, c'est un élément idempotent (qui en général n'est pas l'élément neutre de $R(\nu+\nu')$). On note par ailleurs respectivement $\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}$ et $\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}$ les foncteurs additifs $\mathrm{Ind}_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')}^{R(\nu+\nu')}$ et $\mathrm{Res}_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')}^{R(\nu+\nu')}$ entre les catégories $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-$Mod et $R(\nu+\nu')-$Mod (nous verrons dans cette section qu'ils induisent des foncteurs entre les catégories $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-$mod et $R(\nu+\nu')-$mod, les catégories $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-$fmod et $R(\nu+\nu')-$fmod, les catégories $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-$pmod et $R(\nu+\nu')-$pmod).

Lemme 10.5.1. Soient $\nu, \nu', \nu'' \in \mathbb{N}[I]$ et M, M', M'' des modules à gauche gradué respectivement sur $R(\nu)$, $R(\nu')$, $R(\nu'')$. On a la propriété d'associativité suivante :

$$\mathrm{Ind}_{\nu+\nu',\nu''}\big[\big(\mathrm{Ind}_{\nu+\nu'}(M \otimes_{\Bbbk} M')\big) \otimes_{\Bbbk} M''\big] \\ \cong \mathrm{Ind}_{\nu,\nu'+\nu''}\big[M \otimes_{\Bbbk} \big(\mathrm{Ind}_{\nu',\nu''}(M' \otimes_{\Bbbk} M'')\big)\big]$$

Démonstration. Conséquence du lemme 4.5.6. □

Théorème 10.5.1 (*Théorème de Mackey*)**.** Le $\big(R(\nu)\otimes R(\nu'), R(\nu'')\otimes R(\nu''')\big)$-bimodule gradué ${}_{\nu,\nu'}R_{\nu'',\nu'''}$ admet une filtration (par des bimodules gradués) dont les quotients correspondants sont isomorphes à

$$\big({}_{\nu}R_{\nu-\lambda,\lambda} \otimes_{\Bbbk} {}_{\nu'}R_{\nu'+\lambda-\nu''',\nu'''-\lambda}\big) \otimes_{R'} \big({}_{\nu-\lambda,\nu''+\lambda-\nu}R_{\nu''} \otimes_{\Bbbk} {}_{\lambda,\nu'''-\lambda}R_{\nu'''}\big)\{a_\lambda\},$$

où

$$R' = R(\nu-\lambda) \otimes_{\Bbbk} R(\lambda) \otimes_{\Bbbk} R(\nu'+\lambda-\nu''') \otimes_{\Bbbk} R(\nu'''-\lambda), \;\; a_\lambda = -\lambda\cdot(\nu'+\lambda-\nu''')$$

et où les λ parcourent $\mathbb{N}[I]$ de telle sorte que chaque terme ci-dessus soit dans $\mathbb{N}[I]$.

Démonstration. Les auteurs de l'article [17, proposition 2.18] donne une indication, nous allons la développer en s'inspirant de [16, section 3.5].
Il existe un ordre partiel naturel sur $\mathbb{N}[I]$, défini par

$$\lambda \leq \beta \;\text{ s'il existe } \lambda' \text{ tel que } \beta = \lambda + \lambda'.$$

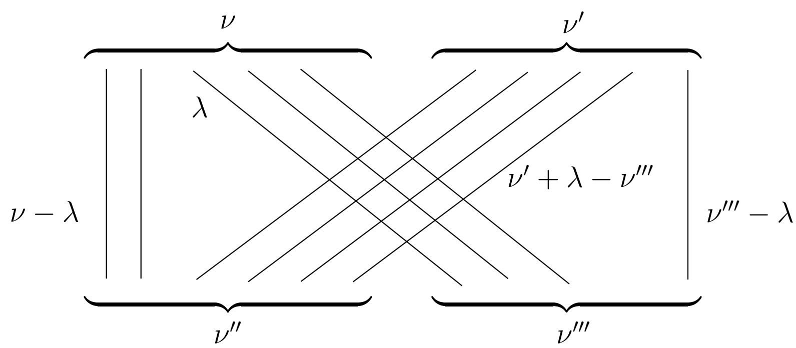
On complète cet ordre en un ordre total, que l'on notera encore $\leq$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}[I]$, on utilisera l'identification naturelle suivante :

$$\mathrm{Seq}(\lambda_1) \times \mathrm{Seq}(\lambda_2) \times \cdots \times \mathrm{Seq}(\lambda_r) \subseteq \mathrm{Seq}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r).$$

On note Λ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{N}[I]$ apparaissant dans l'énoncé et on pose

$$n = |\nu|, \ \ n' = |\nu'|, \ \ n'' = |\nu''|, \ \ n''' = |\nu'''| \ \text{ et } \ m = n + n' = n'' + n'''.$$

$\mu = (n, n')$ et $\mu'' = (n'', n''')$ désigneront les compositions correspondantes. A chaque $\lambda \in \Lambda$, est associé de façon naturelle une permutation $d(\lambda) \in D_{\mu,\mu'}$, ce qu'explique mieux que des mots le diagramme suivant :



On notera y_λ l'élément de ${}_{\nu,\nu'}R_{\nu'',\nu'''}$ égal à $\sum_{\boldsymbol{k}} \widehat{d(\lambda)}_{\boldsymbol{k}}$, où la somme est prise sur l'ensemble des $\boldsymbol{k} \in \mathrm{Seq}(\nu - \lambda) \times \mathrm{Seq}(\nu' + \lambda - \nu''') \times \mathrm{Seq}(\lambda) \times \mathrm{Seq}(\nu''' - \lambda)$, que l'on notera dans la suite $\mathrm{Seq}(-\lambda-)$. Remarquons que y_λ est homogène de degré $-\lambda \cdot (\nu' + \lambda - \nu''')$.
Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on définit les $(R(\nu) \otimes R(\nu'), R(\nu'') \otimes R(\nu'''))$-bimodules gradués suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\leq\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\beta\in\Lambda,\, \beta\leq\lambda} \big(R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')\big) y_\beta \big(R(\nu'') \otimes_{\Bbbk} R(\nu''')\big) \ , \\
\mathcal{B}_{<\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\beta\in\Lambda,\, \beta<\lambda} \big(R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')\big) y_\beta \big(R(\nu'') \otimes_{\Bbbk} R(\nu''')\big) \ , \\
\mathcal{B}_{\lambda} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_{\leq\lambda} / \mathcal{B}_{<\lambda} \ .
\end{aligned}$$

Ces trois modules admettent respectivement pour bases

$$\Big(x_u (\widehat{\omega d(\beta) \omega''})_{\boldsymbol{i}} \ \ / \ \ \omega \in S_\mu, \ \omega'' \in S_{\mu''} \cap D^{-1}_{d(\beta)^{-1}\mu \cap \mu''}, \\ \omega''(\boldsymbol{i}) \in \mathrm{Seq}(-\beta-), \ \beta \in \Lambda, \ \beta \leq \lambda, \ u \in \mathbb{N}^m \Big),$$

$$\big(x_u(\widehat{\omega d(\beta)\omega''})_{\boldsymbol{i}} \;\;/\;\; \omega \in S_\mu,\; \omega'' \in S_{\mu''} \cap D^{-1}_{d(\beta)^{-1}\mu\cap\mu''},$$
$$\omega''(\boldsymbol{i}) \in \mathrm{Seq}(-\beta-),\; \beta \in \Lambda,\; \beta < \lambda,\; u \in \mathbb{N}^m\big),$$

et

$$\big(x_u(\widehat{\omega d(\lambda)\omega''})_{\boldsymbol{i}} \;\;/\;\; \omega \in S_\mu,\; \omega'' \in S_{\mu''} \cap D^{-1}_{d(\lambda)^{-1}\mu\cap\mu''},$$
$$\omega''(\boldsymbol{i}) \in \mathrm{Seq}(-\lambda-),\; u \in \mathbb{N}^m\big),$$

d'après le lemme 8.2.3, la remarque 9.3.1 et le théorème 9.3.1. Toujours d'après le lemme 8.2.3 et le théorème 9.3.1, les $\mathcal{B}_{\leq\lambda}$ définissent une filtration de ${}_{\nu,\nu'}R_{\nu'',\nu'''}$, quand λ parcourt Λ selon l'ordre total précédemment défini. Les quotients correspondants sont alors les $\mathcal{B}_\lambda$.
Considérons à présent, pour $\lambda \in \Lambda$, l'application

$$\big({}_\nu R_{\nu-\lambda,\lambda} \otimes_{\Bbbk} {}_{\nu'}R_{\nu'+\lambda-\nu''',\nu'''-\lambda}\big) \otimes_{R'} \big({}_{\nu-\lambda,\nu''+\lambda-\nu}R_{\nu''} \otimes_{\Bbbk} {}_{\lambda,\nu'''-\lambda}R_{\nu'''}\big)\{a_\lambda\} \to \mathcal{B}_\lambda$$
$$(x \otimes x') \otimes (x'' \otimes x''') \;\mapsto\; (x \otimes x')y_\lambda(x'' \otimes x''')$$

que l'on vérifie être bien définie d'après la remarque 9.3.1, préservant la graduation et $\big(R(\nu) \otimes R(\nu'), R(\nu'') \otimes R(\nu''')\big)$-linéaire. Encore d'après le lemme 8.2.3, la remarque 9.3.1 et le théorème 9.3.1, on voit que le bimodule à gauche ci-dessus admet pour base

$$\big((x^u\widehat{\omega}_{\boldsymbol{j}}) \otimes \widehat{\omega''}_{\boldsymbol{j}} \;\;/\;\; \omega \in S_\mu,\; \omega'' \in S_{\mu''} \cap D^{-1}_{d(\lambda)^{-1}\mu\cap\mu''},$$
$$\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(-\lambda-),\; \boldsymbol{j} = \omega''(\boldsymbol{i}),\; u \in \mathbb{N}^m\big),$$

où l'on a fait les identifications naturelles (voir lemme 9.1.1). Cette base est envoyée sur celle de $\mathcal{B}_\lambda$, explicitée plus haut, par le morphisme construit précédemment, ce dernier est donc bijectif. □

Remarque 10.5.1. Nous appelons ce théorème, théorème de Mackey, car il s'apparente au théorème éponyme original : voir [16, section 3.5].

Lemme 10.5.2. Soient $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu')$. On a :

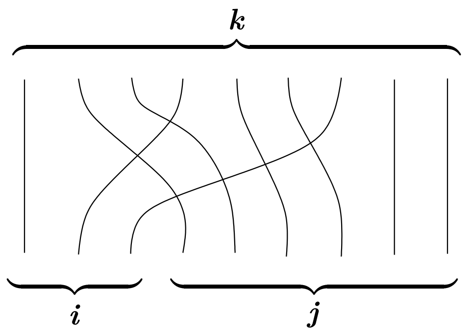
$$\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}(P_{\boldsymbol{i}} \otimes_{\Bbbk} P_{\boldsymbol{j}}) \cong P_{\boldsymbol{ij}}.$$

De façon plus générale soient $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$ et $\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seqd}(\nu')$, on a encore :

$$\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}(P_{\boldsymbol{i}} \otimes_{\Bbbk} P_{\boldsymbol{j}}) \cong P_{\boldsymbol{ij}}.$$

Démonstration. Démontrons la deuxième affirmation dont la première est un cas particulier. Soient donc $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$ et $\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seqd}(\nu')$, alors $P_{\boldsymbol{i}} \otimes_{\Bbbk} P_{\boldsymbol{j}} = \big(R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')\big)\big(\psi(1(\boldsymbol{i})) \otimes \psi(1(\boldsymbol{j}))\big)\{\langle \boldsymbol{i}\rangle + \langle \boldsymbol{j}\rangle\}$. Le lemme 3.3.3 permet de conclure. $\square$

Définition 10.5.1. Un mélange $\boldsymbol{k}$ est une paire de séquences $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu')$, accompagné de la donnée d'une permutation de battage dans $B(p,q)$ où $p = |\nu|$ et $q = |\nu'|$. On note $\deg(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ le degré du diagramme naturellement associé au mélange :



On désignera parfois également par $\boldsymbol{k}$ la séquence obtenue à partir du mélange (la séquence haute du diagramme).

Remarque 10.5.2. Le degré $\deg(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est bien défini d'après la remarque 9.3.1.

Proposition 10.5.1. Pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathrm{Seq}(\nu + \nu')$, on a

$$\begin{aligned} 1_{\nu,\nu'} P_{\boldsymbol{k}} &\cong \bigoplus_{\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}} P_{\boldsymbol{i}} \otimes P_{\boldsymbol{j}}\{\deg(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})\}, \\ {}_{\boldsymbol{k}}P 1_{\nu,\nu'} &\cong \bigoplus_{\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}} {}_{\boldsymbol{i}}P \otimes {}_{\boldsymbol{j}}P\{\deg(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})\}, \end{aligned}$$

la somme étant indéxée par toutes les possibilités de représenter $\boldsymbol{k}$ comme un mélange de $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu')$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{k} \in \mathrm{Seq}(\nu + \nu')$, on note $p = |\nu|$, $q = |\nu'|$ et $m = p + q$.

$$\big(\widehat{\omega}_{\boldsymbol{ij}} x^u \ / \ \boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu), \boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu'), \omega \in S_m \text{ tq. } \omega(\boldsymbol{ij}) = \boldsymbol{k}, u \in \mathbb{N}^m\big)$$

est une base homogène du $\Bbbk$-espace vectoriel gradué ${}_{\boldsymbol{k}}P\,1_{\nu,\nu'}$, d'après 9.3.1.

$$\big((\widehat{\sigma}_{\boldsymbol{i}} \otimes \widehat{\tau}_{\boldsymbol{j}})\,x^u \ / \ \boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu),\, \boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu'),\, \sigma \in S_p,\, \tau \in S_q,\, u \in \mathbb{N}^m\big)$$

est une base homogène du $\Bbbk$-espace vectoriel gradué $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')$, d'après 9.3.1 et en utilisant l'identification fournie par le lemme 9.3.1.

$$\big(\widehat{\omega}_{\boldsymbol{ij}} \ / \ \boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu),\, \boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu'),\, \omega \in B(p,q) \text{ tq. } \omega(\boldsymbol{ij}) = \boldsymbol{k}\big)$$

est alors une base homogène du $R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')$-module à droite gradué ${}_{\boldsymbol{k}}P\,1_{\nu,\nu'}$. On obtient ainsi la deuxième égalité de l'énoncé, puis la première en utilisant l'anti-involution ψ. □

Corollaire 10.5.1. $1_{\nu,\nu'}R(\nu+\nu')$ et $R(\nu+\nu')1_{\nu,\nu'}$ sont des $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')$-modules, respectivement à gauche et à droite, projectifs de type fini.

Démonstration. La proposition précédente montre en particulier que $1_{\nu,\nu'}P_{\boldsymbol{k}}$ et ${}_{\boldsymbol{k}}P1_{\nu,\nu'}$ sont des $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')$-modules, respectivement à gauche et à droite, projectifs de type fini. Le fait que $R(\nu+\nu') = \bigoplus_{\boldsymbol{k}} {}_{\boldsymbol{k}}P = \bigoplus_{\boldsymbol{k}} P_{\boldsymbol{k}}$ prouve le corollaire. □

Proposition 10.5.2. Les foncteurs $\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}$ et $\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}$ induisent des foncteurs additifs entre les catégories $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-\mathrm{mod}$ et $R(\nu+\nu')-\mathrm{mod}$, les catégories $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-\mathrm{fmod}$ et $R(\nu+\nu')-\mathrm{fmod}$, les catégories $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-\mathrm{pmod}$ et $R(\nu+\nu')-\mathrm{pmod}$.

Démonstration. Le corollaire précédent affirme en particulier que $1_{\nu,\nu'}R(\nu+\nu')$ et $R(\nu+\nu')1_{\nu,\nu'}$ sont de type fini. D'après les propositions 4.5.2 et 4.5.3, le cas des catégories de type $-\mathrm{mod}$ et $-\mathrm{fmod}$ est prouvé. Pour les catégories de type $-\mathrm{pmod}$, le résultat pour $\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}$ est conséquence de la proposition 4.5.1, le résultat pour $\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}$ conséquence de la première affirmation du corollaire précédent (qui affirme que $\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}\big(R(\nu+\nu')\big)$ est projectif), de l'additivité du foncteur dans les catégories de type $-\mathrm{Mod}$ et du lemme 4.5.3. □

Proposition 10.5.3. Les foncteurs $\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}$ et $\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}$ induisent des morphismes $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-linéaires naturels $[\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}]$ et $[\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}]$ entre les groupes de Grothendieck $G_0(R(\nu)$ et $G_0(R(\nu+\nu'))$, $K_0(R(\nu))$ et $K_0(R(\nu+\nu'))$.

Démonstration. Les deux foncteurs induisent des morphismes de groupes naturels d'après la proposition 4.5.4, le fait que $R(\nu+\nu')1_{\nu,\nu'}$ soit projectif (donc plat) d'après le corollaire 10.5.1 et le lemme 4.5.1. Le fait qu'ils soient de plus $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-linéaires est conséquence du lemme 4.5.3. □

Définition 10.5.2. Etant données f and g deux fonctions sur les ensembles respectifs $\mathrm{Seq}(\nu)$ and $\mathrm{Seq}(\nu')$, à valeur dans un anneau commutatif unitaire contenant $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, on définit leur produit mélangé (quantique) $f \shuffle g$ comme une fonction sur l'ensemble $\mathrm{Seq}(\nu + \nu')$ donnée par

$$(f \shuffle g)(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{i} * \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}} q^{\deg(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})} f(\boldsymbol{i}) g(\boldsymbol{j}),,$$

la somme étant indéxée par toutes les possibilités de représenter $\boldsymbol{k}$ comme un mélange de $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu')$.

Lemme 10.5.3. Soients $M \in R(\nu)-\mathrm{mod}$ et $N \in R(\nu')-\mathrm{mod}$, on a alors

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}(M \otimes_{\Bbbk} N)) = \mathrm{ch}(M) \shuffle \mathrm{ch}(N).$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{k} \in \mathrm{Seq}(\nu + \nu')$, on a

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}(M \otimes_{\Bbbk} N), \boldsymbol{k}) = \mathrm{gdim}_{\Bbbk}\big(1(\boldsymbol{k}).\big[R(\nu+\nu') \otimes_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')} (M \otimes_{\Bbbk} N)\big]\big).$$

En utilisant deux fois le lemme 3.3.1, on a les isomorphismes de $\Bbbk$-espace vectoriel gradué suivants :

$$\begin{aligned} 1(\boldsymbol{k}).\big[R(\nu+\nu') &\otimes_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')} (M \otimes_{\Bbbk} N)\big] \\ &\cong {}_{\boldsymbol{k}}P \otimes_{\Bbbk} \big[R(\nu+\nu') \otimes_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')} (M \otimes_{\Bbbk} N)\big] \\ &\cong \big[{}_{\boldsymbol{k}}P \otimes_{\Bbbk} R(\nu+\nu')\big] \otimes_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')} (M \otimes_{\Bbbk} N) \\ &\cong {}_{\boldsymbol{k}}P \otimes_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')} (M \otimes_{\Bbbk} N). \end{aligned}$$

Soients $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu')$, en utilisant encore le lemme 3.3.1, on a les isomorphismes de $\Bbbk$-espace vectoriel gradué suivants :

$$\begin{aligned} ({}_{\boldsymbol{i}}P \otimes_{\Bbbk} {}_{\boldsymbol{j}}P) &\otimes_{R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')} (M \otimes_{\Bbbk} N) \\ &\cong ({}_{\boldsymbol{i}}P \otimes_{R(\nu)} M) \otimes_{\Bbbk} ({}_{\boldsymbol{j}}P \otimes_{R(\nu')} N) \\ &\cong 1(\boldsymbol{i}).M \otimes_{\Bbbk} 1(\boldsymbol{j}).N\ . \end{aligned}$$

La proposition précédente permet de conclure. □

Remarque 10.5.3. On note que les auteurs de l'article [17, proposition 2.16] affirment que $1_{\nu,\nu'} R(\nu+\nu')$ est un $R(\nu) \otimes R(\nu')$-module libre gradué. Toutefois la preuve présentée ne permet pas de le montrer car la base exhibée n'est pas consituée d'éléments homogènes. On peut alors se demander si cette affirmation est tout de même vraie. La réponse est non en général. Nous allons, pour le voir, considérer un contre-exemple.

Soient i et j tels que $i \cdot j = 0$, on va s'interesser à $\nu = i+j$ et $\nu' = i$. D'après la section des exemples 9.2, on a $R(2i) = NH_2$ et $R(2i+j) = \mathfrak{M}_3(NH_2 \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[x])$, où l'on choisit l'indexage des lignes et des colonnes de la façon suivante :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} iij & iji & jii \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{c} iij \ \rightarrow \\ iji \ \rightarrow \\ jii \ \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$1_{i+j,j}R(2i+j)$ est le sous-$\Bbbk$-module dont la première ligne est nulle. D'après le lemme 3.2.4, on a alors

$$
\begin{aligned}
\operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(1_{i+j,j}R(2i+j)\big) &= 6 \operatorname{gdim}_{\Bbbk}(NH_2) \operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(\Bbbk[x]\big) \\
&= 6 \left[(1+q^{-2}) \frac{1}{(1-q^2)^2}\right] \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{6(1+q^{-2})}{(1-q^2)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{et} \quad \operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(R(i+j) \otimes_{\Bbbk} R(i)\big) &= \operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(\mathfrak{M}_2(\Bbbk[x_1,x_2])\big) \operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(\Bbbk[x]\big) \\
&= 4 \frac{1}{(1-q^2)^2} \frac{1}{1-q^2} = \frac{4}{(1-q^2)^3}.
\end{aligned}
$$

Le quotient des dimensions graduées

$$
\frac{\operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(1_{i+j,j}R(2i+j)\big)}{\operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(R(i+j) \otimes_{\Bbbk} R(i)\big)}
$$

est alors dans $\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$ mais pas dans $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$, donc $1_{i+j,j}R(2i+j)$ ne peut être un $\big(R(i+j) \otimes_{\Bbbk} R(i)\big)$-module gradué libre.

Remarquons que l'important corrolaire 2.17 de l'article reste toutefois vrai : c'est une des affirmations de la proposition 10.5.2, qui est une conséquence indirecte de la proposition 10.5.1 (la proposition 2.19 de l'article). On pourrait répéter cette même remarque pour plusieurs résultats à venir. Cela s'explique par le fait que, même si $R(\nu + \nu')$ n'est pas un $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')$-module gradué libre de type fini, il est toutefois projectif de type fini (corollaire 10.5.1). Pour finir, les auteurs de l'article semblent agir comme s'ils avaient remarquer l'erreur car finalement ils contournent la proposition erronée pour redémontrer leur corollaire 2.17 à la page 35 : "Restriction, in the case of these inclusions, also takes projectives to projectives, by Proposition 2.19 and the Krull-Shmidt property". Ils commettent toutefois une autre erreur, puisqu'ils supposent alors que les modules P_i sont indécomposables : voir la remarque 10.3.3.

11 Catégorifications des algèbres ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$

11.1 Le groupe de Grothendieck de R

Pour un graphe Γ, on note la $\Bbbk$-algèbre graduée

$$R = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}[I]} R(\nu).$$

Remarque 11.1.1. R n'est pas unitaire.

Définition 11.1.1. On définit les catégories suivantes :

$$\begin{aligned} R-\mathrm{mod} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}[I]} R(\nu)-\mathrm{mod}, \\ R-\mathrm{fmod} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}[I]} R(\nu)-\mathrm{fmod}, \\ R-\mathrm{pmod} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}[I]} R(\nu)-\mathrm{pmod}. \end{aligned}$$

Remarque 11.1.2. D'après la remarque 4.2.2, ce sont des catégories additives et on peut voir que ce sont, pour ces structures additives, des sous-catégories additives de la catégorie des R-modules à gauche gradués. D'après les remarques 4.2.10 et 4.3.2, pour ces structures, $R-\mathrm{mod}$ et $R-\mathrm{fmod}$ sont de plus abéliennes, et $R-\mathrm{pmod}$ semi-simple.

Définition 11.1.2. On note respectivement $K_0(R)$ et $G_0(R)$ les groupes de Grothendieck G_0 de $R-\mathrm{pmod}$ et $R-\mathrm{fmod}$.

Remarque 11.1.3. D'après la proposition 4.3.3 et la remarque précédente, il est inutile de faire une distinction entre les groupes de Grothendieck G_0 et G pour $R-\mathrm{pmod}$.

Remarque 11.1.4. On note qu'on a, d'après la remarque 4.3.1, les identifications naturelles de groupe abélien suivantes :

$$G_0(R) \cong \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}[I]} G_0(R(\nu)), \quad K_0(R) \cong \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}[I]} K_0(R(\nu)).$$

Les stuctures de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-modules des groupes de Grothendieck $G_0(R(\nu)$ et $K_0(R(\nu))$ permettent, en utilisant les identifications précédentes, de définir une structure de $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-module pour $G_0(R)$ et $K_0(R)$, où l'action de q (resp de q^{-1}) correspond alors à élever (resp. abaisser) la graduation de 1 (on rappelle que l'on peut voir les éléments de $R-$fmod et $R-$pmod comme des R-modules : voir la remarque 11.1.2). Les groupes $G_0(R(\nu))$ et $K_0(R(\nu))$ deviennent des sous-$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-modules respectivement de $G_0(R)$ et $K_0(R)$ et en constituent des décompositions en somme directe et définissent une $(\mathbb{N}[I], +)$-graduation.

Définition 11.1.3. On étend la définition des couplages symétriques $(\cdot, \cdot)$ (voir (10.2) et (10.4)) à $K_0(R)$ et $G_0(R)$ en imposant aux sous-$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-modules correspondants à différents ν d'être orthogonaux.

Définition 11.1.4. On définit les catégories suivantes :

$$\begin{aligned} R \otimes R-\text{mod} &\overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\nu, \nu' \in \mathbb{N}[I]} R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-\text{mod}, \\ R \otimes R-\text{fmod} &\overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\nu, \nu' \in \mathbb{N}[I]} R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-\text{fmod}, \\ R \otimes R-\text{pmod} &\overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\nu, \nu' \in \mathbb{N}[I]} R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-\text{pmod}. \end{aligned}$$

Remarque 11.1.5. D'après la remarque 4.2.2, ce sont des catégories additives et on peut voir que ce sont, pour ces structures additives, des sous-catégories additives de la catégorie des $(R \otimes_{\Bbbk} R)$-modules à gauche gradués. D'après la remarque 4.2.10, pour ces structures $R \otimes R-$mod et $R \otimes R-$fmod sont de plus abéliennes. D'après la remarque 4.3.2 et la proposition 4.4.3, la catégorie $R \otimes R-$pmod est semi-simple.

Définition 11.1.5. Chaque foncteur $\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}$ définit par composition avec l'injection de la catégorie $R(\nu)-$mod dans la catégorie $R-$mod un foncteur additif de $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')-$mod dans $R-$mod. En sommant sur ν et ν', on obtient alors le foncteur additif

$$\mathrm{Ind} : R \otimes R-\text{mod} \longrightarrow R-\text{mod}, \quad \text{où } \mathrm{Ind} = \bigoplus_{\nu, \nu'} \mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}.$$

Chaque foncteur $\mathrm{Res}_{\nu',\nu''}$ définit par composition avec l'injection de la catégorie $R(\nu') \otimes_{\Bbbk} R(\nu'')-$mod dans la catégorie $R \otimes R-$mod un foncteur additif de $R(\nu' + \nu'')-$mod dans $R \otimes R-$mod. Soit $\nu \in \mathbb{N}[I]$, en sommant, sur l'ensemble des couples (ν', ν'') tels que $\nu' + \nu'' = \nu$, les foncteurs $\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}$, on obtient un foncteur additif Res_ν. En sommant finalement sur ν, on a le foncteur additif

$$\mathrm{Res} : R\mathrm{-mod} \longrightarrow R \otimes R\mathrm{-mod},$$

où

$$\mathrm{Res} = \bigoplus_{\nu} \mathrm{Res}_\nu \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_\nu = \bigoplus_{\nu'+\nu''=\nu} \mathrm{Res}_{\nu',\nu''}.$$

Définition 11.1.6. On définit deux applications $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-linéaires

$$[G] : G_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} G_0(R) \to G_0(R \otimes R\mathrm{-fmod}),$$

$$[K] : K_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} K_0(R) \to G(R \otimes R\mathrm{-pmod}),$$

pour tout ν, ν' par :

$$[G]\big([M] \otimes [N]\big) \stackrel{\text{def}}{=} [M \otimes_{\Bbbk} N] \quad \text{et} \quad [K]\big([M] \otimes [N]\big) \stackrel{\text{def}}{=} [M \otimes_{\Bbbk} N]\ ,$$

où $M \in R(\nu)\mathrm{-fmod}$, $N \in R(\nu')\mathrm{-fmod}$ (resp. $M \in R(\nu)\mathrm{-pmod}$, $N \in R(\nu')\mathrm{-pmod}$) et $M \otimes_{\Bbbk} N$ est considéré comme un $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')$-module.

Proposition 11.1.1. Le foncteur Ind induit des applications $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-linéaires, que l'on note toutes les deux [Ind], sur les groupes de Grothendieck $G_0(R)$ et $K_0(R)$:

$$[\mathrm{Ind}] : G_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} G_0(R) \to G_0(R)\ ,$$

$$[\mathrm{Ind}] : K_0(R) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} K_0(R) \to K_0(R)\ .$$

Démonstration. D'après la proposition 4.5.4, le foncteur Ind induit des applications $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-linéaires du groupe de Grothendieck $G_0(R \otimes R\mathrm{-fmod})$ dans $G_0(R)$ et du groupe de Grothendieck $G(R \otimes R\mathrm{-pmod})$ dans $K_0(R)$. On obtient les deux morphismes [Ind] en composant avec les applications $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-linéaires $[G]$ et $[K]$. □

Proposition 11.1.2. [Ind] fait de $G_0(R)$ et $K_0(R)$ des $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-algèbres (associatives) unitaires graduées (sur $(\mathbb{N}[I], +)$).

Démonstration. Il suffit de vérifier l'associativité et l'existence d'un élément neutre. Les auteurs de l'article [17, proposition 3.1] donne très rapidement la solution à ces deux points, explicitons-la. Considérons l'image dans $K_0(R)$ (resp. $G_0(R)$) du module trivial $\Bbbk$ sur $R(0) = \Bbbk$. Pour vérifier qu'il s'agit de l'élément neutre, il suffit de le faire sur les sous $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-modules $K_0(R(\nu))$ (resp. $G_0(R(\nu))$), ce qui est immédiat. De même il suffit de vérifier l'associativité sur tous les triplets de sous-modules $K_0(R(\nu))$ (resp. $G_0(R(\nu))$). Le lemme 10.5 permet alors de conclure. Quant au caractère gradué des algèbres, la vérification est immédiate. □

Remarque 11.1.6. On voit facilement que le produit défini par [Ind] fait de $G_0(R)$ et $K_0(R)$ des $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-algèbres gradués (sur $\mathbb{N}[I]$).

Proposition 11.1.3. Le foncteur Res induit une application $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-linéaire, que l'on note [Res] :

$$[\mathrm{Res}] : K_0(R) \to K_0(R\otimes R)\ .$$

Démonstration. Conséquence de la proposition 4.5.4. □

Soient $x_1, x_2 \in K_0(R)$, on note simplement x_1x_2 le produit $[\mathrm{Ind}](x_1,x_2)$. Soient $\nu,\nu',\nu'',\nu''' \in \mathbb{N}[I]$, M et N des modules gradués respectivement sur $R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')$ et $R(\nu'')\otimes_{\Bbbk} R(\nu''')$. Notons

$$R' = R(\nu)\otimes_{\Bbbk} R(\nu')\otimes_{\Bbbk} R(\nu'')\otimes_{\Bbbk} R(\nu''')$$

et

$$R'' = R(\nu+\nu'')\otimes_{\Bbbk} R(\nu'+\nu''').$$

On a les isomorphisme de R''-module gradué (d'après ça et ça)

$$\mathrm{Ind}_{R'}^{R''}(M\otimes_{\Bbbk} N) \cong \left[\left(R(\nu+\nu'')1_{\nu,\nu''}\right)\otimes_{\Bbbk}\left(R(\nu'+\nu''')1_{\nu',\nu'''}\right)\right]\otimes_{R'}(M\otimes_{\Bbbk} N),$$

ce qui prouve, d'après le corollaire 10.5.1 que $\mathrm{Ind}_{R'}^{R''}(M\otimes_{\Bbbk} N) \in R''-\mathrm{pmod}$. D'après la proposition 4.5.4 et la remarque 11.1.4,

$$[M][N] = q^{-\nu'\cdot\nu''}[\mathrm{Ind}_{R'}^{R''}(M\otimes_{\Bbbk} N)]$$

définit un produit (tordu) qui fait de $K_0(R\otimes R)$, en reprenant la démonstration de la proposition 11.1.2, une $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-algèbre (associative) unitaire graduée (sur $(\mathbb{N}[I],+)$).

Lemme 11.1.1. $[K] : K_0(R)\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}K_0(R) \to K_0(R\otimes R)$ est un morphisme de $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-algèbre.

Démonstration. Immédiat. □

Définition 11.1.7. Le couplage $(\cdot,\cdot)$ sur $K_0(R)$ induit un couplage symétrique sur $K_0(R)\,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\,K_0(R)$ (de la même façon que pour $'\mathbf{f}$: voir la proposition 7.3.1), que l'on note encore $(\cdot,\cdot)$.
On définit un couplage symétrique sur $K_0(R\otimes R)$ de la même façon que l'on a défini $(\cdot,\cdot)$ sur $K_0(R)$, que l'on note encore $(\cdot,\cdot)$.

Lemme 11.1.2. $[K]$ préserve les couplages $(\cdot,\cdot)$:

$$([K](x),[K](y))=(x,y).$$

Démonstration. Immédiat. □

Proposition 11.1.4. [Res] est un homomorphisme d'algèbre de $K_0(R)$ dans $K_0(R\otimes R)$ (muni de la structure d'algèbre précédemment définie).

Démonstration. Les auteurs de l'article [17, proposition 3.2] indique qu'il s'agit d'une conséquence du thèorème de Mackey 10.5.1, expliquons de quelle façon.
Soient $\nu,\nu',\nu'',\nu'''\in\mathbb{N}[I]$, M et N des modules gradués respectivement sur $R(\nu'')$ et $R(\nu''')$. On a

$$[\mathrm{Res}]([M])=\sum_{\beta\leq\nu''}[1_{\beta,\nu''-\beta}.M]\quad\text{et}\quad[\mathrm{Res}]([N])=\sum_{\lambda\leq\nu'''}[1_{\lambda,\nu''-\lambda}.M].$$

Le produit $[\mathrm{Res}]([M])\ [\mathrm{Res}]([N])$ est alors, en utilisant le lemme 3.3.1 et le lemme 4.5.1,

$$\sum_{\lambda\leq\nu''',\beta\leq\nu''}q^{-(\nu''-\beta)\cdot\lambda}\ \left[(R_1\otimes_{R'}R_2)\otimes_{R(\nu'')\otimes_{\Bbbk}R(\nu''')}(M\otimes_{\Bbbk}N)\right],$$

où

$$R_1={}_{\lambda+\beta}R_{\beta,\lambda}\otimes_{\Bbbk}{}_{\nu''+\nu'''-\lambda-\beta}R_{\nu''-\beta,\nu'''-\lambda},\quad R_2={}_{\beta,\nu''-\beta}R_{\nu''}\otimes_{\Bbbk}{}_{\lambda,\nu'''-\lambda}R_{\nu'''}$$

$$\text{et}\quad R'=R(\beta)\otimes_{\Bbbk}R(\lambda)\otimes_{\Bbbk}R(\nu''-\beta)\otimes_{\Bbbk}R(\nu'''-\lambda).$$

La projection du produit dans le sous-$\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-module $K_0(R(\nu)\otimes R(\nu'))$ de $K_0(R\otimes R)$ correspond à imposer les conditions

$$\lambda+\beta=\nu\quad\text{et}\quad\nu''+\nu'''-\lambda-\beta=\nu'.$$

Cette projection est alors

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} q^{-(\nu'+\lambda-\nu''')\cdot\lambda}\ \big[(R_1 \otimes_{R'} R_2) \otimes_{R(\nu'')\otimes_{\Bbbk} R(\nu''')} (M \otimes_{\Bbbk} N)\big],$$

où

$$R_1 = {}_{\nu}R_{\nu-\lambda,\lambda} \otimes_{\Bbbk} {}_{\nu'}R_{\nu'+\lambda-\nu''',\nu'''-\lambda}, \quad R_2 = {}_{\nu-\lambda,\nu''+\lambda-\nu}R_{\nu''} \otimes_{\Bbbk} {}_{\lambda,\nu'''-\lambda}R_{\nu'''},$$

$$R' = R(\nu-\lambda) \otimes_{\Bbbk} R(\lambda) \otimes_{\Bbbk} R(\nu'+\lambda-\nu''') \otimes_{\Bbbk} R(\nu'''-\lambda),$$

et où Λ désigne l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{N}[I]$ tels que chaque terme au-dessus soit dans $\mathbb{N}[I]$.
$M \otimes_{\Bbbk} N$ est un $R(\nu'') \otimes_{\Bbbk} R(\nu''')$-module gradué projectif donc plat d'après la proposition 4.4.10. Le théorème de Mackey 10.5.1 et le lemme 4.5.1 impliquent alors que la projection dans la sous-catégorie $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')$ de $(\mathrm{Res} \circ \mathrm{Ind})(M \otimes_{\Bbbk} N)$ admet, en tant que $R(\nu) \otimes_{\Bbbk} R(\nu')$-module gradué, une filtration dont les quotients respectifs sont

$$(R_1 \otimes_{R'} R_2) \otimes_{R(\nu'')\otimes_{\Bbbk} R(\nu''')} (M \otimes_{\Bbbk} N)\{-\lambda\cdot(\nu'+\lambda-\nu''')\},$$

où λ parcourt Λ. D'après la remarque (G0 et K0) et la symétrie de la forme bilinéaire sur $\mathbb{N}[I]$, on a alors montré que

$$[\mathrm{Res}]([M])\ [\mathrm{Res}]([N]) = [\mathrm{Res}]([M][N]),$$

ce qui permet de conclure d'après la remarque 11.1.4. □

Proposition 11.1.5. Le couplage $(\cdot,\cdot)$ sur $K_0(R)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $(1,1) = 1$,
2. $([P_i],[P_j]) = \delta_{i,j}(1-q^2)^{-1}$ pour $i,j \in I$,
3. $(x, yy') = ([\mathrm{Res}](x), [K](y \otimes y'))$, pour $x, y, y' \in K_0(R)$,
4. $(xx', y) = ([K](x \otimes x'), [\mathrm{Res}](y))$, pour $x, x', y \in K_0(R)$,

Démonstration. Bien que la définition de [Res] et l'énoncé de la proposition soient ici quelque peu différents, il apparaît que la preuve de [17, proposition 3.3] est exactement celle de notre proposition. □

Définition 11.1.8. On définit une involution anti-$\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-linéaire $^{-}$ de $K_0(R)$ en étendant (voir la remarque 11.1.3) la définition de $^{-}$ sur chaque $K_0(R(\nu))$ (voir laproposition 10.3.6).

Remarque 11.1.7. Par définition, cette involution préserve la graduation (sur $\mathbb{N}[I]$).

Proposition 11.1.6. Il existe un morphisme de $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-algèbre graduée (sur $\mathbb{N}[I]$)

$$\gamma : {}_{\mathcal{A}}\mathbf{f} \to K_0(R)$$

qui envoie $\theta_{i_1}^{(a_1)} \dots \theta_{i_k}^{(a_k)}$ sur $[P_{\boldsymbol{i}}]$, où $\boldsymbol{i} = i_1^{(a_1)} \dots i_k^{(a_k)}$. Il transforme la forme bilinéaire sur ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ en celle définie précédemment sur $K_0(R)$:

$$(x,y) = (\gamma(x),\gamma(y)) \quad \text{pour tout } x,y \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}.$$

γ transforme l'involution anti-$\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-linéaire de ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ en celle de $K_0(R)$:

$$\overline{\gamma(x)} = \gamma(\bar{x}) \quad \text{pour tout } x \in {}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}.$$

Enfin la comultiplication $r : \mathbf{f} \to \mathbf{f}\,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Q}(q)}\mathbf{f}$ correspond à [Res] au sens où

$$[K] \circ (\gamma \otimes \gamma) \circ r = [\mathrm{Res}] \circ \gamma.$$

Démonstration. La preuve de [17, proposition 3.4] reste entièrement valable avec les modifications que nous avons apportées, seul le fait que γ préservent les couplages et la comultiplication demande à être reconsidéré.
Les applications

$$\gamma_{\mathbb{Q}(q)} : \mathbf{f} \to K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)}, \quad r : \mathbf{f} \to \mathbf{f}\,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Q}(q)}\mathbf{f},$$
$$\text{et} \quad \gamma_{\mathbb{Q}(q)} \otimes \gamma_{\mathbb{Q}(q)} : \mathbf{f}\,\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Q}(q)}\mathbf{f} \to K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)}\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Q}(q)}K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)}$$

sont des morphismes de $\mathbb{Q}(q)$-algèbres. D'après le lemme 11.1.1 et la proposition 11.1.4, c'est également le cas de

$$[K]_{\mathbb{Q}(q)} : K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)}\widetilde{\otimes}_{\mathbb{Q}(q)}K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)} \to K_0(R \otimes R)_{\mathbb{Q}(q)}$$
$$\text{et} \quad [\mathrm{Res}]_{\mathbb{Q}(q)} : K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)} \to K_0(R \otimes R)_{\mathbb{Q}(q)}.$$

Par définition, on vérifie immédiatement que $[K]_{\mathbb{Q}(q)} \circ (\gamma_{\mathbb{Q}(q)} \otimes \gamma_{\mathbb{Q}(q)}) \circ r$ et $[\mathrm{Res}]_{\mathbb{Q}(q)} \circ \gamma_{\mathbb{Q}(q)}$ envoient sur les même images les générateurs θ_i, pour $i \in I$, ce qui implique que ces deux morphismes de $\mathbb{Q}(q)$-algèbres coïncident. En dessinant un diagramme commutatif et en utilisant le fait que ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ s'injecte dans $\mathbf{f}$, on obtient au passage la dernière assertion. Le lemme 11.1.2, la proposition 11.1.5 et la proposition 7.3.1 prouvent alors que

$$(x,y) = (\gamma(x),\gamma(y)) \quad \text{pour tout } x,y \in \mathbf{f}.$$

Notons pour finir que les auteurs font implicitement usage dans leur preuve du lemme 10.5.2. □

11.2 Preuve de la surjectivité

Les résultats de cette section sont une transposition de ceux d'une partie de [16, chapitre 5]. Les objets ne sont pas les mêmes mais de façon formelle, la progression et les preuves sont identiques. On suppose à partir de maintenant que $\Bbbk$ est algèbriquement clos. Notons que le développement qui suit doit se faire dans les catégories de type $-$fmod (c'est ce qui est fait dans [16]) et non du type $-$mod, comme le préconise l'article [17] : voir la remarque 11.2.3 plus loin.

Définition 11.2.1. Soit $M \in R(\nu)-$fmod et $i \in I$. On définit

$$\Delta_i M = \mathrm{Res}_{\nu-i,i} = (1_{\nu-i} \otimes 1_i).M = {}_{\nu-i,i}R_\nu \otimes_{R(\nu)} M$$

et plus généralement

$$\Delta_{i^n} M = \mathrm{Res}_{\nu-ni,ni} = (1_{\nu-ni} \otimes 1_{ni}).M = {}_{\nu-ni,ni}R_\nu \otimes_{R(\nu)} M.$$

Si $\nu - ni$ n'appartient pas à $\mathbb{N}[I]$, on pose par convention $\Delta_{i^n} = 0$.

Remarque 11.2.1. Δ_{i^n} est un foncteur additif exact de la catégorie $R(\nu)-$fmod dans la catégorie $R(\nu - ni) \otimes R(ni)-$fmod : voir lemme 4.5.2. On a, d'après le théorème de réciprocité de Frobenius 4.5.1 et la remarque qui le suit, les isomorphismes fonctoriels de $\Bbbk$-algèbre graduée

$$\begin{aligned}&\mathrm{HOM}_{R(\nu)}(\mathrm{Ind}_{\nu-ni,ni} N \otimes L(i^n), M)\\ &\qquad\cong \mathrm{HOM}_{R(\nu-ni)\otimes R(ni)}(N \otimes L(i^n), \Delta_{i^n} M)\end{aligned} \tag{11.1}$$

avec $M \in R(\nu)-$mod et $N \in R(\nu - ni)-$mod.

Lemme 11.2.1.

$$\mathrm{ch}(\Delta_{i^n} M) = \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathrm{Seq}(\nu-ni)} \mathrm{ch}(M, \boldsymbol{j} i^n) \cdot \boldsymbol{j} \ ,$$

où $\Delta_{i^n} M$ est vu comme un module sur la sous-algèbre $R(\nu - ni)$ de $R(\nu - ni) \otimes R(ni)$.

Démonstration. Immédiat. □

Définition 11.2.2. Soit $M \in R(\nu)-$mod, on note $\varepsilon_i(M) = \max\{n \geq 0 \ / \ \Delta_{i^n} M \neq 0\}$.

Remarque 11.2.2. $\varepsilon_i(M)$ est la longueur de la suite la plus longue de i intervenant dans une séquence $\boldsymbol{k}$, telle que $1_{\boldsymbol{k}}.M \neq 0$.

Lemme 11.2.2. Si $M \in R(\nu)-$mod est irréductible et $N \otimes_{\Bbbk} L(i^n)\{r\}$ est un sous-module irréductible de $\Delta_{i^n}(M)$, avec $0 \leq n \leq \varepsilon_i(M)$ et $r \in \mathbb{Z}$, alors $\varepsilon_i(N) = \varepsilon_i(M) - n$.

Démonstration. Analogue de [16, lemme 5.1.2], voir l'article [17, lemme 3.6]. □

Lemme 11.2.3. Soient $N \in R(\nu)-$mod irréductible tel que $\varepsilon_i(N) = 0$ et $M = \mathrm{Ind}_{\nu,ni} N \otimes_{\Bbbk} L(i^n)$. Alors

1. $\Delta_{i^n} M \cong N \otimes L(i^n)$,
2. $\mathrm{hd}M$ est irréductible et $\varepsilon_i(\mathrm{hd}M) = n$,
3. tous les autres facteurs de composition L de M est tel que $\varepsilon_i(L) < n$.

Démonstration. Analogue de [16, lemme 5.1.3], voir l'article [17, lemme 3.7]. □

Remarque 11.2.3. Notons qu'il est effectivement nécessaire de travailler dans les catégories de type $-$fmod afin d'assurer l'existence des suites de composition : voir la remarque 3.5.1 et la proposition 3.6.1.

Lemme 11.2.4. Soient $M \in R(\nu)-$mod irréductible et $\varepsilon = \varepsilon_i(M)$. $\Delta_{i^\varepsilon} M$ est isomorphe à $N \otimes_{\Bbbk} L(i^\varepsilon)$, où $N \in R(\nu - \varepsilon i)-$mod est irréductible et $\varepsilon_i(N) = 0$.

Démonstration. Analogue de [16, lemme 5.1.4]. □

Lemme 11.2.5. Soient $N \in R(\nu)-$mod irréducible et $M = \mathrm{Ind}_{\nu,ni} N \otimes_{\Bbbk} L(i^n)$. $\mathrm{hd}M$ est irréducible, $\varepsilon_i(\mathrm{hd}M) = \varepsilon_i(N) + n$ et et tous les autres facteurs de composition L de M sont tels que $\varepsilon_i(L) < \varepsilon_i(N) + n$.

Démonstration. Analogue de [16, lemme 5.1.5]. □

Proposition 11.2.1. Pour tout $M \in R(\nu)-$fmod irréductible et $0 \leq n \leq \varepsilon_i(M)$, $\mathrm{soc}\Delta_{i^n} M$ est un $R(\nu - ni) \otimes_{\Bbbk} R(ni)$-module irréductible de la forme $L \otimes_{\Bbbk} L(i^n)$, où $\varepsilon_i(L) = \varepsilon_i(M) - n$.

Démonstration. Analogue de [16, théorème 5.1.6], voir l'article [17, proposition 3.10]. On note l'usage du théorème de Kato 8.3.2 et du lemme 8.3.7. □

Définition 11.2.3. Soit $e_i = \mathrm{Res}_{\nu-i}^{\nu-i,i} \circ \Delta_i$ le foncteur (covariant, additif et exact, entre les catégories de type $-$fmod) défini comme la composée de Δ_i avec la restriction de $R(\nu-i)\otimes R(i)$ à $R(\nu-i)$. Si i n'est pas dans le support de ν, on pose par convention $e_i = 0$.

Lemme 11.2.6. Soit $M \in R(\nu)-$fmod, on a

$$\varepsilon_i(M) = \max\{n \geq 0 \ / \ e_i^n(M) \neq 0\}.$$

Démonstration. Par transitivité de la restriction, on a (quand il est possible d'écire $\nu - ni$ dans $\mathbb{N}[I]$)

$$e_i^n = \mathrm{Res}_{\nu-ni}^{\nu} = \mathrm{Res}_{\nu-ni}^{\nu-ni,ni} \circ \Delta_i^n.$$

On conclut en remarquant que $\mathrm{Res}_{\nu-ni}^{\nu-ni,ni}(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0$ (le morphisme $R(\nu-ni) \to R(\nu-ni)\otimes_{\Bbbk} R(ni)$ est unitaire). □

Remarque 11.2.4. Signalons une erreur (qui oblige à modifier l'énoncé du corollaire 3.12 de l'article [17] : voir le corollaire suivant), il est affirmé dans l'article que

$$\mathrm{Res}_{\nu-i}^{\nu}(M) = \bigoplus_{i\in I} e_i(M).$$

Ici $\mathrm{Res}_{\nu-i}^{\nu}$ désigne le foncteur (covariant, additif et exact, entre les catégories de type $-$fmod) de restriction de $R(\nu)$ à $R(\nu-i)$ (quand $i \in \mathrm{Supp}(\nu)$). Il faudrait plutôt lire

$$\mathrm{Res}_{\nu-i}^{\nu} = e_i \ ,$$

conséquence de la transitivité de la restriction.

Corollaire 11.2.1. Soit $M \in R(\nu)-$fmod irréductible tel que $\varepsilon_i(M) > 0$. Alors $\mathrm{soc}(e_iM)$ est irréductible et $\varepsilon_i(\mathrm{soc}(e_iM)) = \varepsilon_i(M) - 1$.

Démonstration. Analogue de [16, corollaire 5.1.7]. □

Définition 11.2.4. Soit $M \in R(\nu)-$fmod irréductible, on définit

$$\widetilde{e}_iM := \mathrm{soc}(e_iM) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}_iM := \mathrm{hd}\ \mathrm{ind}_{\nu,i}^{\nu+i} M \otimes L(i).$$

Remarque 11.2.5. Soit $M \in R(\nu)-$fmod irréductible, le module $\widetilde{f}_iM$ est irréductible d'après le lemme 11.2.5, tandis que $\widetilde{e}_iM$ est irréductible ou nul d'après le corollaire 11.2.1. Par ailleurs, on a

$$\varepsilon_i(M) = \max\{n \geq 0 | \widetilde{e}_i^n M \neq 0\}, \quad \varepsilon_i(\widetilde{f}_iM) = \varepsilon_i(M) + 1.$$

Dans les lemme 11.2.7, 11.2.9 et le corollaire 11.2.2 qui suivent, les isomorphismes ne préservent pas forcément la graduation, mais sont toutefois homogènes (i.e. préservent la graduation quitte à la décaler).

Lemme 11.2.7. Soit $M \in R(\nu)-$fmod irréductible, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{soc}\Delta_{i^n} M &\cong (\widetilde{e}_i^n M) \otimes L(i^n), \\ \mathrm{hd}\ \mathrm{ind}_{\nu,ni}(M \otimes L(i^n)) &\cong \widetilde{f}_i^n M. \end{aligned}$$

Démonstration. Analogue de [16, lemme 5.2.1]. □

Lemme 11.2.8. Soit $M \in R(\nu)-$fmod irréductible, le socle de $e_i^n M$ est isomorphe à $\widetilde{e}_i^n M^{\oplus [n]!}\{-\frac{n(n-1)}{2}\}$.

Démonstration. Analogue de [16, lemme 5.2.1]. □

Lemme 11.2.9. Soient $M \in R(\nu)-$fmod irréductible et $N \in R(\nu+i)-$fmod, on a $\widetilde{f}_i M \cong N$ si et seulement si $\widetilde{e}_i N \cong M$.

Démonstration. Analogue de [16, lemme 5.2.3]. □

Corollaire 11.2.2. Soient $M, N \in R(\nu)-$fmod irréductible. Alors $\widetilde{f}_i M \cong \widetilde{f}_i N$ si et seulement si $M \cong N$. Supposons $\varepsilon_i(M), \varepsilon_i(N) > 0$, $\widetilde{e}_i M \cong \widetilde{e}_i N$ si et seulement si $M \cong N$.

Démonstration. Analogue de [16, corollaire 5.2.4]. □

Le caractère $\mathrm{ch}(M)$ de $M \in R(\nu)-$fmod est à valeurs dans $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]\,\mathrm{Seq}(\nu)$, le $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-module libre engendré par $\mathrm{Seq}(\nu)$. On obtient clairement une application linéaire $G_0(R(\nu))$ to $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]\mathrm{Seq}(\nu)$.

Théorème 11.2.1. L'application

$$\mathrm{ch} : G_0(R(\nu)) \to \mathbb{Z}[q, q^{-1}]\,\mathrm{Seq}(\nu)$$

est injective.

Démonstration. Analogue de [16, théorème 5.3.1], voir l'article [17, théorème 3.17]. □

Proposition 11.2.2. Soit $\Bbbk$ un corps quelconque. L'application $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-linéaire $\gamma_{\mathbb{Q}(q)} : \mathbf{f} \longrightarrow K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)}$ est un isomorphisme.

Démonstration. Supposons pour commencer $\Bbbk$ algébriquement clos. En étendant aux scalaires $\mathbb{Q}(q)$ les $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-modules $G_0(R(\nu))$ et $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]\,\mathrm{Seq}(\nu)$, on obtient l'application $\mathbb{Q}(q)$-linéaire :

$$\mathrm{ch}_{\mathbb{Q}(q)} : G_0(R(\nu)) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(q) \to \mathbb{Q}(q)\,\mathrm{Seq}(\nu).$$

Le couplage 10.2 défini entre $K_0(R(\nu))$ et $G_0(R(\nu))$ s'étend de façon naturelle en un couplage $\mathbb{Q}(q)$-bilinéaire entre $K_0(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)} \overset{\text{def}}{=} K_0(R(\nu))\otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}$ et $G_0(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)} \overset{\text{def}}{=} G_0(R(\nu))\otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}$, qui admettent pour $\mathbb{Q}(q)$-bases les familles $(S_b)_b$ et $(P_b)_b$. ch est injectif d'après le précédent théorème, il envoie donc toute $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-base de $G_0(R(\nu))$ sur une famille $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-libre de $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]\,\mathrm{Seq}(\nu)$, ce qui montre que $\mathrm{ch}_{\mathbb{Q}(q)}$ est aussi injectif. D'après la proposition 10.3.8, le couplage précédemment défini entre $K_0(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)}$ et $G_0(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)}$ est parfait, et on obtient alors en dualisant $\mathrm{ch}_{\mathbb{Q}(q)}$, une application $\mathbb{Q}(q)$-linéaire surjective (car on dualise sur un corps)

$$(\mathrm{ch}_{\mathbb{Q}(q)})^{\star} : \mathbb{Q}(q)\,\mathrm{Seq}(\nu) \to K_0(R(\nu)) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(q).$$

Soit $\boldsymbol{k} in \mathrm{Seq}(\nu)$ et $M \in -\mathrm{fmod}$, on a alors par définition

$$\left[(\mathrm{ch}_{\mathbb{Q}(q)})^{\star}(\boldsymbol{k})\right]([M]) = \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(1(\boldsymbol{k}).M)\ .$$

Or $([P_{\boldsymbol{k}}],[M]) = \mathrm{gdim}_{\Bbbk}(1(\boldsymbol{k}).M)$ d'après le lemme 3.3.1, ce qui prouve la factorisation suivante :

$$\mathbb{Q}(q)\,\mathrm{Seq}(\nu) \to \mathbf{f}_{\nu} \overset{\gamma_{\mathbb{Q}(q)}}{\to} K_0(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)}\ .$$

Cela prouve en particulier que $\gamma_{\mathbb{Q}(q)} : \mathbf{f}_{\nu} \to K_0(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)}$ est surjective.
Supposons maintenant $\Bbbk$ quelconque et soit $\widehat{\Bbbk}$ sa clôture algébrique. L'extension des scalaires de $\Bbbk$ à $\widehat{\Bbbk}$ définit une application $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-linéaire $K_0^{\Bbbk}(R(\nu)) \to K_0^{\widehat{\Bbbk}}(R(\nu))$ pour tout ν, et par suite une application $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-linéaire $K_0^{\Bbbk}(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)} \to K_0^{\widehat{\Bbbk}}(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)}$. On a la factorisation suivante :

$$\gamma^{\widehat{\Bbbk}}_{\mathbb{Q}(q)} : \mathbf{f} \overset{\gamma^{\Bbbk}_{\mathbb{Q}(q)}}{\to} K_0^{\Bbbk}(R(\nu))_{\mathbb{Q}(q)} \to K_0^{\widehat{\Bbbk}}(R\nu))_{\mathbb{Q}(q)}\ ,$$

ce qui prouve que $\gamma^{\Bbbk}_{\mathbb{Q}(q)}$ est également surjective. Par suite (en sommant sur ν), $\gamma^{\Bbbk}_{\mathbb{Q}(q)} : \mathbf{f} \to K_0(R)_{\mathbb{Q}(q)}$ l'est aussi. Or on a montré dans la preuve de la proposition 11.1.6 que $\gamma^{\Bbbk}_{\mathbb{Q}(q)}$ était injective, ce qui permet de conclure. □

Remarque 11.2.6. Les auteurs de l'article [17] ont oublié de faire une distinction entre le cas algébriquement clos et le cas général. La preuve qui consiste simplement à dualiser n'est en effet pas possible dans le cas général puisque l'on a montré que le couplage 10.2 était parfait seulement dans le cas algébriquement clos. De plus l'exposition précédente, inspirée de [16], a été faite dans le cas algèbriquement clos.

Supposons pour le moment que Γ soit fini, et choisissons sur I un ordre total :

$$i(0) < i(1) \cdots < i(r-1), \quad \text{où } r = |I|.$$

Pour $k > r$ on pose $i(k) = i(k')$, où k' est le reste de k modulo r.

Définition 11.2.5. Soit $M \in R(\nu)-$fmod. On définit par récurrence les suites $(M_k)_{k\geq 0}$ et $(y_k)_{k\geq 0}$:

$$M_0 = M \ \text{ et } \ y_0 = \varepsilon_{i(0)}(M),$$

$$\text{pour } k \geq 0, \quad M_{k+1} = \widetilde{e}_{i(k)}^{y_k}(M_k) \ \text{ et } \ y_{k+1} = \varepsilon_{i(k+1)}(M_{k+1}).$$

Remarque 11.2.7. Soit $M \in R(\nu)-$fmod et (y_k) la suite d'entiers correspondante. On voit facilement par récurrence que

$$M_k \in R\big(\nu - y_0\, i(0) - y_1\, i(1) - \cdots - y_{k-1}\, i(k-1)\big)-\text{fmod},$$

ce qui montre que $\sum_{k\geq 0} y_k \leq |\nu|$. Supposons l'inégalité stricte, il existe alors s tel que $y_k = 0$ dès que $k \geq s$, tel que $y_{s-1} \neq 0$ et tel que $\sum_{k=0}^{s-1} y_k < |\nu|$. Ainsi M_s est un $R(\nu')$-module non nul, avec $\nu' \neq 0$ (d'après ce qui précède) et est tel que $\varepsilon_{i(k)}(M_s) = 0$ pour tout $k \geq s$. En d'autres termes, $\varepsilon_i(M_s) = 0$ pour tout $i \in I$, ce qui implique d'après la remarque 11.2.2 que $1(\boldsymbol{k}).M_s = 0$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathrm{Seq}(\nu')$, donc que $1.M_s = 0$, c'est-à-dire $M_s = 0$. C'est absurde.
En conclusion la suite (y_k) est presque nulle et vérifie

$$\sum_{k\geq 0} y_k = |\nu|.$$

Lemme 11.2.10. Soient $M, N \in R(\nu)-$fmod irréductibles et (y_k), (z_k) les suites d'entiers respectives correspondantes. M et N sont isomorphes, à décalage de la graduation près, si et seulement si les suites d'entiers (y_k) et (z_k) sont égales.

Démonstration. L'implication directe est immédiate, la réciproque se montre par récurrence (sur la "longueur" de la suite d'entier, finie d'après la remarque précédente), en utilisant la remarque 11.2.5 et le corollaire 11.2.2. □

Corollaire 11.2.3. L'ordre lexicographique sur les suites d'entiers : $(y_k) > (z_k)$ si il existe $t \geq 0$ tel que

$$y_0 = z_0,\ y_1 = z_1,\ \ldots,\ y_{t-1} = z_{t-1} \text{ et } y_t > z_t\ ,$$

induit un ordre total sur $\mathbf{B}'_\nu$.

Démonstration. On associe à $b \in \mathbf{B}'_\nu$, la suite d'entiers correspondants au $R(\nu)$-module irréductible S_b. Le caractère antisymétrique de l'ordre induit est conséquence du lemme précédent. Les autres axiomes d'un ordre total sont immédiatement vérifiés. □

Définition 11.2.6. Soit $b \in \mathbf{B}'_\nu$, on note Y_b le $R(\nu)$-module gradué projectif $P_{\boldsymbol{i}}$, où $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$ est défini par

$$\boldsymbol{i} = i(s)^{(y_s)} \cdots i(1)^{(y_1)}\, i(0)^{(y_0)},$$

où s est n'importe quel entier positif tel que $y_k = 0$ pour tout $k > s$ (voir la remarque 11.2.7).

Lemme 11.2.11. Soient $M \in R(\nu)-$fmod irréductible et (y_k) la suite d'entier associée. On a, pour tout $s \geq 0$, l'isomorphisme de R'-module gradué

$$e_{i(s)}^{y_s} \circ \cdots \circ e_{i(1)}^{y_1} \circ e_{i(0)}^{y_0}(M) \\ \cong \left(\widetilde{e}_{i(s)}^{y_s} \circ \cdots \circ \widetilde{e}_{i(1)}^{y_1} \circ \widetilde{e}_{i(0)}^{y_0}(M)\right)^{[y_0]^! [y_1]^! \cdots [y_s]^!} \left\{\sum_{k=0}^{s} \frac{y_k(y_k-1)}{2}\right\},$$

où $R' = R\big(\nu - y_0\, i(0) - y_1\, i(1) - \cdots - y_s\, i(s)\big)$.

Démonstration. Notons $n = y_0$ et $i = i(0)$. D'après le lemme 11.2.4, $\Delta_{ni}(M)$ est isomorphe en tant que $R(\nu - ni) \otimes_{\Bbbk} R(ni)$-module gradué à $N \otimes_{\Bbbk} L(i^n)$, où N est un $R(\nu - ni)$-module gradué irréductible. Par transitivité de la restriction (voir la preuve du lemme 11.2.6), $e_i^n = \mathrm{Res}_{\nu-ni}^{\nu-ni,ni} \circ \Delta_{ni}$, ce qui prouve que $e_i^n(M)$ est complètement réductible et coïncident donc avec son socle. D'après le lemme 11.2.8, on a alors l'isomorphisme de $R\big(\nu - y_0\, i(0)\big)$-module gradué

$$e_{i(0)}^{y_0}(M) \cong \widetilde{e}_{i(0)}^{y_0}(M)^{[y_0]!}\left\{-\frac{y_0(y_0-1)}{2}\right\}.$$

Par récurrence sur s et en remarquant que les foncteurs e_i commutent avec les décalages de graduations (puisque c'est le cas pour les restrictions et le passage au socle), on obtient le résultat. $\square$

Proposition 11.2.3. Soit Γ non nécessairement fini et $\nu \in \mathbb{N}[I]$. On a les isomorphismes homogènes d'espaces vectoriels gradués

$$Y_c^{\psi} \otimes_{R(\nu)} S_b = 0 \quad \text{si } b < c \quad \text{et} \quad Y_b^{\psi} \otimes_{R(\nu)} S_b = \Bbbk.$$

Démonstration. On suppose pour commencer que Γ est fini.
Soient (y_k) et (z_k) les suites d'entiers respectivement associées à S_b et S_c. On suppose $b < c$, donc l'existence d'un $t \geq 0$ tel que

$$y_0 = z_0,\ y_1 = z_1,\ \ldots,\ y_{t-1} = z_{t-1} \text{ et } y_t > z_t.$$

D'après le lemme précédent, on a l'isomorphisme homogène de module

$$e_{i(t-1)}^{z_{t-1}} \circ \cdots \circ e_{i(1)}^{z_1} \circ e_{i(0)}^{z_0}(S_b) \cong \left(\widetilde{e}_{i(t-1)}^{z_{t-1}} \circ \cdots \circ \widetilde{e}_{i(1)}^{z_1} \circ \widetilde{e}_{i(0)}^{z_0}(S_b)\right)^{[z_0]![z_1]!\cdots[z_{t-1}]!}.$$

Cela prouve (puisque $z_t > y_t$) que

$$e_{i(t)}^{z_t} \circ e_{i(t-1)}^{z_{t-1}} \circ \cdots \circ e_{i(1)}^{z_1} \circ e_{i(0)}^{z_0}(S_b) = 0,$$

et par suite que

$$e_{i(s)}^{z_s} \circ \cdots \circ e_{i(1)}^{z_1} \circ e_{i(0)}^{z_0}(S_b) = 0,$$

où s est tel que $z_k = 0$ pour tout $k > s$. Par transitivité de la restriction et du fait que la somme des z_k est $|\nu|$ (voir la remarque 11.2.7), le $\Bbbk$-module gradué $e_{i(t)}^{z_t} \circ e_{i(t-1)}^{z_{t-1}} \circ \cdots \circ e_{i(1)}^{z_1} \circ e_{i(0)}^{z_0}(S_b)$ n'est autre que $1(\widehat{\boldsymbol{i}}).S_b$, où $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seqd}(\nu)$ est défini par

$$\boldsymbol{i} = i(s)^{(z_s)} \cdots i(1)^{(z_1)}\, i(0)^{(z_0)}.$$

D'après le corollaire 10.4.1 et le lemme 3.3.1, on a alors

$$Y_c^{\psi} \otimes_{R(\nu)} S_b \cong {}_{\boldsymbol{i}}P \otimes_{R(\nu)} S_b \cong 1(\boldsymbol{i}).S_b = 0.$$

Quant à la deuxième affirmation, en utilisant les mêmes arguments que précédemment, on a l'isomorphisme de module gradué

$$\left(Y_b^{\psi} \otimes_{R(\nu)} S_b\right)^{\boldsymbol{i}!} \{-\langle \boldsymbol{i} \rangle\} \cong e_{i(s)}^{y_s} \circ \cdots \circ e_{i(1)}^{y_1} \circ e_{i(0)}^{y_0}(S_b),$$

où $\boldsymbol{i} = i(s)^{(y_s)} \cdots i(1)^{(y_1)} i(0)^{(y_0)}$ et s tel que $y_k = 0$ pour tout $k > s$. Or d'après le lemme précédent,

$$e_{i(s)}^{y_s} \circ \cdots \circ e_{i(1)}^{y_1} \circ e_{i(0)}^{y_0}(S_b) \cong \left(\widetilde{e}_{i(s)}^{y_s} \circ \cdots \circ \widetilde{e}_{i(1)}^{y_1} \circ \widetilde{e}_{i(0)}^{y_0}(S_b)\right)^{\boldsymbol{i}!} \{-\langle \boldsymbol{i} \rangle\}.$$

$\widetilde{e}_{i(s)}^{y_s} \circ \cdots \circ \widetilde{e}_{i(1)}^{y_1} \circ \widetilde{e}_{i(0)}^{y_0}(S_b)$ est d'après la remarque 11.2.5 un $\Bbbk$-espace vectoriel gradué irréductible, il est donc isomorphe, à décalage de la graduation près, à $\Bbbk$ en tant qu'espace vectoriel gradué, ce qui est donc également le cas pour $Y_b^{\psi} \otimes_{R(\nu)} S_b$.
Le cas général où Γ n'est pas nécessairement fini s'en déduit en remarquant que $\mathrm{Supp}(\nu)$ est lui fini (il suffit de travailler dans le graphe fini induit par Γ et dont les sommets sont les éléments de $\mathrm{Supp}(\nu)$). □

Remarque 11.2.8. Remarquons deux erreurs dans l'énoncé de cette proposition dans l'article [17, proposition 3.20], les auteurs y ont écrit $\mathrm{HOM}(\cdot,\cdot)$ à la place de $\cdot^{\psi} \otimes_{R(\nu)} \cdot$. Il est très probable, d'après la remarque 10.4.2, qu'ils n'aient pas fait la distinction. Quant à l'autre erreur, c'est d'avoir inversé l'inégalité entre b et c.

Théorème 11.2.2. $\gamma : \mathcal{A}f \to K_0(R)$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$-algèbre graduée (sur $\mathbb{N}[I]$) qui vérifie en outre les propriétés énoncées dans la propriété 11.1.6. bialgebras.

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a

$$(Y_c, S_b) = 0 \quad \text{si } b < c \quad \text{et} \quad (Y_b, S_b) = q^a \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z},$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le couplage 10.2. D'après le lemme 2.2.2, cela prouve que la famille $(Y_b)_b$ est une base dans le $\mathcal{A}$-module $K_0(R(\nu))$, et par suite que l'application $\gamma : \mathcal{A}f \to K_0(R(\nu))$ est surjective. La proposition 11.1.6 permet de conclure. □

Question 11.2.1. D'après cet isomorphisme et ses propriétés on voit que les images de [Res] ont toujours un antécédent dans $K_0(R) \mathbin{\widetilde{\otimes}_{\mathcal{A}}} K_0(R)$. La question est de savoir si $[K]$ est injective ou, plus particulièrement, si l'antécédent précédent est unique. Une réponse positive permettrait alors de définir de manière intrinsèque (i.e. avec [Res]) la comultiplication dans $K_0(R)$, de telle sorte que γ et $\gamma_{\mathbb{Q}}$ deviennent des isomorphismes respectivement de $\mathcal{A}$-bialgèbre tordue et $\mathbb{Q}$-bialgèbre tordue. En d'autres mots, cela permettrait de catégorifier également la comultiplication. Cette catégorification serait de plus effective, dans le sens où pour la calculer il suffirait de trouver une décomposition en somme directe des restrictions, où les facteurs seraient de la forme $M \otimes_{\Bbbk} N$. La proposition 10.5.1 est alors dans cette optique intéressante puisqu'elle fournirait une règle de calcul.

11.3 Applications

Proposition 11.3.1. Le nombre de classes d'isomorphisme (à décalage de graduation près) de $R(\nu)$-module gradués irréductibles est le même quel que soit le corps $\Bbbk$.

Démonstration. Immédiat. □

Corollaire 11.3.1. Soit $\nu \in \mathbb{N}[I]$ et $\Bbbk$ un corps quelconque. Un $R(\nu)$-module (gradué) irréductible est absolument irréductible.

Démonstration. Admis. □

Lemme 11.3.1. Le couplage 10.4 défini sur $K_0(R(\nu))$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]\,(\nu)_q$, où pour rappel

$$(\nu)_q = \operatorname{gdim}_{\Bbbk}\big(\operatorname{Sym}(\nu)\big) = \prod_{i \in \Gamma} \left(\prod_{a=1}^{\nu_i} \frac{1}{1 - q^{2a}} \right).$$

Démonstration. Conséquence du lemme 7.4.2. □

Références

[1] Anderson F. W. & Fuller K. *Rings and categories of modules.*
Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 13. Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] Bergman G. M. *The diamond lemma for ring theory.*
Adv. in Math. 29 (1978), no. 2, 178–218.

[3] Calais J. *Eléments de théorie des anneaux.*
Presses Universitaires de France, Paris, 2002.

[4] Calais J. *Eléments de théorie des groupes.*
Presses Universitaires de France, Paris, 1984.

[5] Chari V. & Pressley A. *A guide to quantum groups.*
Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] Curtis C. W. & Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras.*
Reprint of the 1962 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006.

[7] Dipper R. & James G. *Representations of Hecke Algebras of General Linear Groups.*
Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), no. 1, 20–52.

[8] Hazewinkel M. & Gubareni N. & Kirichenko, V. V. *Algebras, Rings and Modules. Volume 1.*
Mathematics and its Applications, 575. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[9] Humphreys J. E. & *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.*
Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[10] Jacobson N. *Basic Algebra I.*
Second edition. W. H. Freeman and Company, New York, 1985.

[11] Jacobson N. *Basic Algebra II.*
Second edition. W. H. Freeman and Company, New York, 1989.

[12] Jantzen J. C. *Lectures on Quantum Groups.*
Graduate Studies in Mathematics, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[13] Karoubi M. *K-theory. An introduction.*
Reprint of the 1978 edition. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[14] Kashiwara M. & Schapira P. *Categories and Sheaves.*
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 332. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[15] Kassel C. & Turaev V. *Braid groups.*
Graduate Texts in Mathematics, 247. Springer, New York, 2008.

[16] Kleshchev A. & *Linear and Projective Representations of Symmetric Groups.*
Cambridge Tracts in Mathematics, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[17] Khovanov M. & Lauda A. D. *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I.*
Preprint arXiv :0803.4121.

[18] Lafon J-P. *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative.*
Collection Enseignement des Sciences, No. 20. Hermann, Paris, 1974.

[19] Luzstig G. *Introduction to Quantum Groups*
Progress in Mathematics, 110. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[20] Manivel L. *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence.*
Cours Spécialisés, 3. Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[21] Masson T. *Introduction aux (Co)Homologies. Cours et exercices.*
Hermann, Paris, 2008.

[22] Pierce R. S. *Associative Algebras.*
Graduate Texts in Mathematics, 88. Studies in the History of Modern Science, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[23] Popescu N. *Abelian categories with applications to rings and modules.*
London Mathematical Society Monographs, No. 3. Academic Press, London-New York, 1973.

[24] Serre J-P. *Complex semisimple Lie algebras.*
Reprint of the 1987 edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[25] Serre J-P. *Représentations linéaires des groupes finis.*
Third revised edition. Hermann, Paris, 1978.